CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1980

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, on désigne par :

- n un entier naturel non nul,
- p un nombre de l'intervalle $]0,1[$
- p_1, p_2, p_3 des nombres réels strictement positifs
- $\mathbb{N}_n$ le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ formé par les entiers naturels au plus égaux à n

Si X est une variable aléatoire réelle discrète dont la distribution de probabilité est définie par :

$$P(X = x_i) = a_i, \quad (i \in \mathbb{N}_n),$$

et si k est un entier naturel non nul, on appelle :

- moment d'ordre k de X le nombre $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n} a_i x_i^k$
- moment centré d'ordre k le nombre $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_n} a_i(x_i - E(X))^k$ où $E(X)$ désigne l'espérance mathématique de X.

PARTIE PRELIMINAIRE

1. Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que $x+y \leqslant n$ on a les égalités :

$$C_n^x.C_{n-x}^y = C_n^y.C_{n-y}^x = \frac{n!}{x!y!(n-x-x)!}$$

2. Soit Z une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est binomiale de paramètres n, p. Pour tout entier naturel k non nul, on désigne respectivement par μ_k et m_k les moment et moment centré d'ordre k de la variable aléatoire Z.
   Démontrer que :

$$\mu_{k+1} = np\mu_k + p(1-p)\frac{d\mu_k}{dp}$$

   et pour $k \geqslant 2$:

$$m_{k+1} = p(1-p)\left[nkm_{k-1} + \frac{dm_k}{dp}\right]$$

   où $\dfrac{d\mu_k}{dp}$ et $\dfrac{dm_k}{dp}$ sont les dérivées de μ_k et m_k par rapport à p.

PARTIE I

Soit T_n le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ défini par :

$$T_n = \{(x,y) \quad / \quad x \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{N}, \quad x+y \leqslant n\}.$$

On considère la fonction f définie sur T_n par :

$$f(x,y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}p_1^x.p_2^y.p_3^{n-x-y}$$

1. A quelle condition doivent satisfaire p_1, p_2, p_3 pour que l'on ait

$$\sum_{(x,y)\in T_n} f(x,y) = 1 \ ?$$

   On supposera cette condition réalisée dans toute la suite du problème

2. On considère la variable aléatoire discrète à deux dimensions, notées (X,Y), dont la distribution de probabilité conjointe est définie pour tout (x,y) élément de T_n par :

$$P(X=x, Y=y) = f(x,y)$$

   (a) Déterminer les distributions de probabilité marginales des variables aléatoires X et Y.
   (b) En déduire les espérances mathématiques $E(X)$, $E(Y)$ ainsi que les variances $V(X)$ et $V(Y)$ des variables aléatoires X et Y.
   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.

3. (a) Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire $S = X + Y$.
   (b) Déduire du (I,3,a) la valeur de la covariance des variables aléatoires X et Y, puis celle de leur coefficient de corrélation linéaire.

PARTIE II

1. (a) Etant donné y éléments de $\mathbb{N}_n$, déterminer la distribution de probabilité conditionnelle de X sachant $(Y = y)$.
   Dans la suite du problème on notera X_y la variable aléatoire ayant cette distribution de probabilité.

   (b) La distribution de probabilité de X_y est " classique ", la reconnaître et en donner les paramètres.

2. Déterminer en fonction de n, y, p_1, p_2 l'espérance mathématique $E(X_y)$ et la variance $V(X_y)$ de la variable aléatoire X_y.

3. Pour tout entier naturel non nul k, on désigne respectivement par $\mu_{y,k}$ les moment et moment centré d'ordre k de la variable aléatoire X_y. Etablir les relations (1) et (2) suivantes :

$$(1) \qquad \mu_{y,k+1} = (n-y)\frac{p_1}{1-p_2}\mu_{y,k} + \frac{p_1 p_3}{(1-p_2)^2}\frac{d\mu_{y,k}}{d\left(\dfrac{p_1}{1-p_2}\right)}$$

   et pour $k \geqslant 2$:

$$(2) \qquad m_{y,k+1} = \frac{p_1 p_3}{(1-p_2)^2}\left[(n-y)k m_{y,k-1} + \frac{d m_{y,k}}{d\left(\dfrac{p_1}{1-p_2}\right)}\right],$$

   où $\dfrac{d\mu_{y,k}}{d\left(\dfrac{p_1}{1-p_2}\right)}$ et $\dfrac{d m_{y,k}}{d\left(\dfrac{p_1}{1-p_2}\right)}$ représentent les dérivées par rapport à $\dfrac{p_1}{1-p_2}$ de $\mu_{y,k}$ et $m_{y,k}$.

4. Que deviennent les résultats des questions II. 1), 2), 3), lorsque l'on considère la distribution de probabilité conditionnelle de Y sachant $(X = x)$?
   On notera dans la suite du problème Y_X la variable aléatoire ayant cette distribution de probabilité

PARTIE III

Soient φ et ψ les applications de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\varphi(x) = E(Y_x) \qquad \text{et} \qquad \psi(y) = E(X_y)$$

Le plan affine étant rapporté au repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ on considère les représentations graphiques C et Γ des fonctions :

$$y = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad x = \psi(y).$$

1. Construire C et Γ dans le cas particulier :

$$n = 12, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{6}$$

2. On appelle support φ^s et ψ^s des fonctions φ et ψ, les fonctions affines réelles dont les restrictions à $\mathbb{N}_n$ sont respectivement φ et ψ. On note C^s et Γ^s leur représentation graphique.

   (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C^s et Γ^s.

   (b) A quelle(s) condition(s) C et Γ ont-elles un point commun ?