CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1980

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME 1

Soit E l'espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$ composé des fonctions à coefficients réels à une inconnue réelle de degré inférieur ou égal à deux et du polynôme nul. Pour tout élément p de E nous désignerons respectivement par p' et p'' les dérivées première et dérivée seconde de p.

Soit Φ l'application qui à tout polynôme $p \in E$ associe la fonction $\Phi(p)$ définie pour tout x réel par :

$$[\Phi(p)](x) = \int_0^1 \left[a.p(t) + bx.p'(x-t) + cx^2t^2.p''(x-t)\right] dt$$

où a, b, c sont des éléments du corps des réels $\mathbb{R}$.
Nous noterons $\beta = (p_0, p_1, p_2)$ la base canonique de E avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$p_0(x) = 1 \quad ; \quad p_1(x) = x \quad ; \quad p_2(x) = x^2$$

Question 1

Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

Question 2

Déterminer la matrice A de l'endomorphisme Φ dans la base β
A quelle(s) condition(s) sur a, b, c l'endomorphisme Φ est-il bijectif ?

Question 3

Considérons le cas particulier $a = 6$, $b = 6$, $c = 3$

a. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme Φ

b. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres

c. Déterminer pour tout entier naturel n non nul, la matrice B de l'endomorphisme Φ^n dans la base β.

PROBLEME 2

Dans une banque on procède à une étude statistique sur un échantillon E de n clients. Pour chacun des clients on a relevé d'une part une estimation du revenu mensuel et d'autre part la valeur du solde moyen du compte courant (évalué sur une période donnée)

La variable statistique " revenu d'un client " est noté X; la variable statistique " solde moyen du compte courant d'un client " est noté Y.

On donne ci-dessous le tableau des fréquences absolues correspondant à la distribution statistique du couple (X, Y) sur l'échantillon E observé (n=1000) (on a regroupé en classes les valeurs de X et Y exprimées en francs).

classes de X \ classes de Y	$0 \leqslant Y < 1000$	$1000 \leqslant Y < 2000$	$2000 \leqslant Y < 3000$	$3000 \leqslant Y < 4000$	$4000 \leqslant Y < 5000$
$3000 \leqslant X < 5000$	60	30	10	0	0
$5000 \leqslant X < 7000$	70	100	20	10	0
$7000 \leqslant X < 9000$	80	100	150	18	2
$9000 \leqslant X < 11000$	40	60	90	50	10
$11000 \leqslant X < 13000$	10	20	45	15	10

Nous noterons c_i $(i \in \{1, 2, ..., 5\})$ les centres des classes des valeurs de X

$$(c_1 = 4000, \quad c_2 = 6000, \quad c_3 = 8000, \quad c_4 = 10000, \quad c_5 = 12000)$$

Soit $(E_1, E_2, ..., E_5)$ la partition de l'ensemble E, telle que E_i désigne le sous-ensemble de E des clients dont le revenu appartient à la classe de centre c_i : nous noterons n_i le nombre d'éléments de E_i.

La distribution de la variable statistique Y sur le sous-ensemble E_i de E est dite distribution conditionnelle de Y pour $X = c_i$; la moyenne et l'écart-type de cette distribution de Y sont respectivement appelés moyenne conditionnelle et écart-type conditionnel de Y pour $X = c_i$ et notées m_y/c_i, σ_y/c_i.

Question 1

Dans un plan affine rapporté au repère orthogonal $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ on considère un ensemble de k points M_i $(i = 1, 2, .., k)$ non alignés de coordonnées (x_i, y_i); on affecte à chaque point M_i un coefficient m_i (nombre réel strictement positif).
Dans les calculs on utilisera les notations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = M, \qquad \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i = \overline{X}, \qquad \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i y_i = \overline{Y}$$

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i y_i = \overline{XY}, \qquad \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 = \overline{X^2}, \qquad \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i y_i^2 = \overline{Y^2}$$

Démontrer qu'il existe une droite D, et une seule, d'équation $y = ax + b$ pour laquelle la somme

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i - ax_i - b)^2 m_i \text{ est minimale}$$

Quelle est l'équation de cette droite que l'on appellera droite d'ajustement de l'ensemble des k points M_i affectés des coefficients m_i ? On remarquera que les écarts entre les points M_i et la droite D sont mesurés parallèlement à l'axe $(O, \overrightarrow{y})$.

Remarque : Compte-tenu du programme du concours les solutions se référant à la notion de dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables ne peuvent être acceptés

Dans les questions suivantes, les résultats numériques seront donnés avec deux décimales.

Question 2

Calculer la moyenne et l'écart-type de la variable X de E.
Calculer les moyennes conditionnelles m_y/c_i $(i \in \{1, 2, .., 5\})$ de la variable Y sur les ensembles E_i.
Tracer dans le repère orthogonal $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ la ligne polygonale $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ où M_i est le point de coordonnées $(c_i, m_y/c_i)$.
Interpréter le graphique ainsi obtenu (2 lignes maximum).

Question 3

En utilisant le résultat de la question 1, déterminer l'équation de la droite d'ajustement de l'ensemble des points M_i $(i = 1, 2, .., 5)$ définis à la question 2, chacun d'eux étant affecté du coefficient $m_i = \dfrac{n_i}{n}$ (les écarts étant mesurés parallèlement à l'axe $(O, \overrightarrow{y})$.

Remarque : les candidats n'ayant pas résolu la question 1 pourront utiliser le résultat suivant : la droite considérée est la droite de régression de Y en X.

Question 4

Calculer, sur l'échantillon E observé, la valeur du coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).
Interpréter le résultat (2 lignes maximum)