CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1981

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREAMBULE

Dans ce problème, on appelle " suite associée à une variable aléatoire réelle X " (X étant quelconque), une suite infinie (X_i) de variables aléatoires réelles X_i ($i \in \mathbb{N}^\times$) de même loi de probabilité que X, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ les n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ soient indépendantes.

PARTIE PRELIMINAIRE

Soit $a > 0$ un réel donné.
Soit $L_1(a)$ l'ensemble des fonctions numériques f, continues sur $]0, a]$, à valeurs positives, telles que l'intégrale

$$\int_0^a f(x)dx$$

converge.
Soit $L_2(a)$ l'ensemble des fonctions numériques f, continues sur $]0, a]$, à valeurs positives, telles que l'intégrale :

$$\int_0^a f^2(x)dx$$

converge.

1. (a) Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments de $L_2(a)$, $\dfrac{(f_1^2 + f_2^2)}{2}$ et le produit $f_1.f_2$ sont éléments de $L_1(a)$.

(b) En déduire que $L_2(a)$ est inclus dans $L_1(a)$.

2. p et q étant des entiers naturels donnés, on considère la fonction réelle $f_{p,q}$ de la variable réelle x définie pour x strictement positif par :
$$f_{p,q}(x) = x^{p-1}(\ln x)^q$$
   (a) A quelle condition nécessaire et suffisante notée " C_0 " $f_{p,q}$ est-elle élément de $L_2(1)$?

   (b) La condition C_0 étant réalisée, calculer :
$$I_{p,q} = \int_0^1 f_{p,q}(x)dx$$

Partie I

Soit X une variable aléatoire réelle, ayant une espérance mathématique $E(X) = \mu \neq 0$ et une variance $V(X) = \sigma^2 > 0$.
On considère la suite (X_i) associée à X ainsi que la suite de variables aléatoires (T_n) dont les éléments sont définis quel que soit $n \in \mathbb{N}^\times$ par :
$$T_n = \alpha_{1,n}X_1 + \alpha_{2,n}X_2 + \cdots + \alpha_{n,n}X_n$$
où les coefficients $\alpha_{i,n}$, ($i \in [\![1, n]\!]$) sont des réels positifs ou nuls.

1. A quelle condition nécessaire et suffisante notée " $C_1(\mu)$ " a-t-on : $E(T_n) = \mu$?
2. La condition $C_1(\mu)$ étant réalisée, montrer qu'une condition nécessaire et suffisante notée " $C_2(\sigma^2)$ " pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$ est :
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_{i,n}\alpha_{j,n} = \frac{1}{2}$$
3. Les conditions $C_1(\mu)$ et $C_2(\sigma^2)$ étant réalisées, vers quelle valeur t_0 la suite de variables aléatoires (T_n) converge-t-elle en probabilité ?

Les indices p et q, définis dans le préliminaire, satisfaisant à la condition C_0 sont maintenant fixés. On pose $f_{p,q} = f$ et $I_{p,q} = I$.

Partie II

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité est la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$. On notera g sa fonction densité de probabilité.
On admettra qu'il existe une variable aléatoire réelle Y dont l'espérance mathématique et le moment d'ordre 2 sont donnés respectivement par
$$E(Y) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \text{et} \quad E(Y^2) = \int_0^1 f^2(x)g(x)dx$$
Soit (Y_i) une suite associée à Y, on pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

1. (a) Montrer que, quels que soient les entiers i et n, Y_i et Z_n satisfont à la condition $C_1(I)$.

   (b) Montrer que Z_n satisfait à la condition $C_2(V(Y))$.

(c) Montrer que, quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$:

$$V(Z_n) = \frac{1}{n-1} E((Y_i - Z_n)^2).$$

2. Montrer que l'inégalité : $|Z_n - I| \leqslant 10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}$ est satisfaite avec une probabilité au moins égale à 0.99.
3. Lorsque n est suffisamment grand, on peut admettre vue la variable aléatoire centrée réduite associée à Z_n a pour loi de probabilité la loi normale centrée réduite.
   Sous cette hypothèse, montrer que l'on peut améliorer l'inégalité précédente, c'est-à-dire trouver $a < 10$ et $P > 0.99$ tels que $P\left(|Z_n - I| \leqslant a\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) \geqslant P$

Partie III

Nota : dans cette partie la notation X^j signifie "X indice j" et NON "X puissance j". On subdivise l'intervalle $]0, 1]$ en k sous-intervalles $]a_j, a_{j+1}]$ non vides et disjoints tels que :

$$\bigcup_{j=1}^{k}]a_j, a_{j+1}] =]0, 1]$$

A chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}]$, on associe

- le nombre $I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)dx$
- la la variable aléatoire X^j de loi de probabilité uniforme sur celui-ci (on notera g_j sa densité de probabilité);
- une suite $(X_i^j)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ associée à X^j
- une variable aléatoire Y^j dont on admettra l'existence, ayant pour espérance mathématique et pour moment d'ordre 2 :

$$E(Y^j) = (a_{j+1} - a_j) \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)g_j(x)dx$$

$$E((Y^j)^2) = (a_{j+1} - a_j)^2 \int_{a_j}^{a_{j+1}} f^2(x)g_j(x)dx$$

- une suite $(Y_i^j)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ associée à Y^j
- la variable aléatoire $Z_{n_j}^j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_i^j$ où $n_j \in \mathbb{N}^\times$.

On pose $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$ et on suppose que les variables aléatoires

- X_j pour $j \in [\![1, k]\!]$ sont indépendantes;
- Y_i^j, pour $j \in [\![1, n_j]\!]$ sont indépendantes;
- $Z_{n_j}^j$, pour $j \in [\![1, k]\!]$ sont indépendantes;

1. Montrer que, quels que soient les entiers n_j, i, j : Y_i^j et $Z_{n_j}^j$ satisfont à la condition $C_1(I_j)$ et que $Z_{n_j}^j$ satisfait à la condition $C_2(V(Y^j))$.

2. On considère la variable aléatoire $Z_n^\star = \sum_{j=1}^{k} Z_{n_j}^j$. Montrer que $E(Z_n^\star) = I$.

3. On suppose que pour tout $j \in [\![2, k]\!]$: $\quad na_j \in \mathbb{N}^\times$.

   (a) Démontrer que si $\forall j \in [\![1, k]\!], \quad n_j = (a_{j+1} - a_j)n$, alors $V(Z_n) \leqslant V(Z_n^\star)$.

   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} V(Z_n^\star) = 0$.