CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1981

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME I

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées séparément.
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des réels, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Soit f l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice, dans la base $\mathcal{E}$, est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PREMIERE PARTIE

Question 1

a. Montrer que f admet une valeur propre triple μ que l'on déterminera

b. Déterminer le rang de l'endomorphisme $(f - \mu i)$ où i désigne l'application identique de E; en déduire la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre μ. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

Question 2

a. Déterminer un vecteur propre $\overrightarrow{u_1}$ de f.
Soit E_1 le sous-espace vectoriel de E engendré par $\overrightarrow{u_1}$.
Soit E'_1 le sous-espace vectoriel engendré par $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

b. Montrer que E_1 et E'_1 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Notons p_1 l'élément de $\mathcal{L}(E)$ qui associe à tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E sa projection sur E'_1 parallèlement à E_1; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{E}$,

c. Déterminer les coordonnées de $p_1(\overrightarrow{x})$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de E'_1.

d. Déterminer la matrice P_1 représentant p_1 dans $\mathcal{E}$ puis la matrice M représentant $p_1 \circ f$ dans $\mathcal{E}$.

Question 3

a. Montrer que μ est valeur propre de $p_1 \circ f$.

b. Quelle est la dimension du sous-espace propre de $p_1 \circ f$ associé à la valeur propre μ.

c. Montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de E; quelle est la matrice de f dans cette base.

DEUXIEME PARTIE

Question 1

Notons ${}^tA$ la transposée de la matrice A

a. Montrer que ${}^tA.A$ est la matrice dans la base $\mathcal{E}$ d'une forme quadratique définie positive φ.

On notera $\|\overrightarrow{x}\|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{x}$ de E définie par la forme quadratique φ, et X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ de E sur la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

b. Exprimer $\|\overrightarrow{x}\|$ en fonction de X et A.

c. Application numérique : calculer $\|\overrightarrow{x}\|$ pour $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Question 2

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ une autre base de E; soit Y la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ de E dans la base $\mathcal{F}$, et soit Q la matrice de changement de base telle que $Y = QX$.

a. Exprimer $\|\overrightarrow{x}\|$ en fonction de Y, Q, A.

b. Montrer que l'on peut choisir $\mathcal{F}$ pour que $\|\overrightarrow{x}\|^2 = {}^tY.Y$;
Donner un exemple d'une telle base et préciser la matrice de changement de base Q correspondante.

Question 3

Soit $h \in \mathcal{L}(E)$, notons $S = \{\|h(\overrightarrow{x})\| \quad / \quad \overrightarrow{x} \in E, \quad \|\overrightarrow{x}\| = 1\}$.

a. Montrer que S est majoré.
Nous admettrons que le plus petit majorant de S appartient à S.
Pour tout $h \in \mathcal{L}(E)$, notons $\phi(h) = \sup\limits_{\|\overrightarrow{x}\|=1} \{\|h(\overrightarrow{x})\|\}$

b. Montrer que : $\forall (h, g) \in (\mathcal{L}(E))^2, \qquad \phi(h \circ g) \leqslant \phi(h)\phi(g)$

c. Montrer que pour tout élément h de $\mathcal{L}(E)$ les modules des valeurs propres de h sont inférieurs ou égaux à $\phi(h)$.

PROBLEME II

f désignant une fonction numérique définie et continue sur $I = [-1, +1]$, on définit l'application F de I dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \qquad F(x) = \int_{-1}^{+1} |t(x-t)|\, f(t)dt$$

Question 1

- Etudier la parité de F lorsque f est paire puis impaire

Question 2

a. Donner pour $x \in [-1, 0]$ puis pour $x \in [0, 1]$ une expression de F ne contenant pas le symbole " valeur absolue "

b. F est-elle continue sur I ?

c. Etudier la dérivabilité de F sur $]-1, 0]$, sur $]0, 1[$, puis en 0

d. Etudier de même l'existence de la dérivée seconde F'' que l'on explicitera.

Question 3

Soit $f(t) = \dfrac{1}{1+t^6}$

- Calculer
$$\varphi_1(y) = \int_0^y t f(t)dt, \qquad \varphi_2(y) = \int_0^y t^2 f(t)dt$$
où y est un réel quelconque.
- En déduire $F(x)$

Question 4

Soit $f(x) = |t| \log\left(1 + \dfrac{1}{2+t}\right)$

- Déterminer le développement limité, à l'ordre 5, au voisinage de 0 de $F(x)$ en fonction de $F(0)$ et $F'(0)$ que l'on ne calculera pas.