CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME N° 1

Les parties I et II sont indépendantes
X et Y désignent deux variables aléatoires réelles définies sur un même univers prenant chacune un nombre fini de valeurs, respectivement $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ et $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$.
On suppose que les x_i (resp. y_j) sont deux à deux distinctes, et on pose, pour tout $(i,j)\in\{1,2,...,l\}\times\{1,2,..,m\}$

$$p_i = P(X=x_i), \qquad q_j = P(Y=y_j), \qquad r_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j) \qquad \delta_{ij} = r_{ij} - p_i q_j$$

I. (1) Montrer que si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle.

(2) Soit U une variable aléatoire réelle qui prend les valeurs $-2,-1,0,1,2$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{6}$. On pose $V=U^2$.

a. Déterminer la loi de probabilité conjointe de (U,V) et la loi de probabilité de V.

b. U et V sont-elles indépendantes ?

c. Calculer la covariance de U et de V. Qu'en concluez-vous ?

II. Etant donnée une suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ de nombres réels, on considère pour chaque entier naturel non nul p, le déterminant d'ordre p défini par $\Delta_1 = 1$ et pour $p\geqslant 2$,

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \cdots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

où α_i^n désigne la puissance $n^{\text{ème}}$ de α_i.

(1) Donner l'expression de Δ_3 sous forme d'un produit de trois facteurs.

(2) Montrer que Δ_p, considérer comme polynôme de la variable α_p est divisible par le produit $\prod_{i=1}^{p-1}(\alpha_p - \alpha_i)$

(3) En déduire, en considérant le développement de Δ_p par rapport à sa dernière colonne, que Δ_p est nul ou de degré $p-1$ par rapport à α_p.

(4) Montrer que $\Delta_p = \Delta_{p-1} \times \prod_{i=1}^{p-1}(\alpha_p - \alpha_i)$ puis que Δ_p est non nul si et seulement si les α_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ sont deux à deux distincts.

III. On suppose que pour tous les entiers h et k tels que $0 \leqslant h \leqslant l-1$ et $0 \leqslant k \leqslant m-1$, la covariance des variables aléatoires X^h et Y^k est donnée par :

$$E(X^h Y^k) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} x_i^h y_j^k$$

(1) Montrer que pour $0 \leqslant h \leqslant l-1$ et $0 \leqslant k \leqslant m-1$,

$$\sum\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} x_i^h y_j^k = 0$$

(2) On pose, pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$ et $1 \leqslant i \leqslant l$

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} y_j^k$$

Déduire de la question précédente que $(\gamma_{1k,}\gamma_{2k}, ..., \gamma_{lk})$ est solution du système formé par les équations

$$\sum_{i=1}^{l} \beta_{ik} x_i^h = 0, \qquad h \in \{0, 1, ..., l-1\}$$

où les inconnues sont les β_{ik}, $i \in \{1, 2, .., l\}$.
Montrer en utilisant le résultat du II. 4) que pour tout $i \in \{1, 2, ..., l\}$ et pour tout $k \in \{0, .., m-1\}$

$$\gamma_{ik} = 0$$

(3) Par une méthode analogue, montrer que

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., l\} \times \{1, 2, ..., m\} \qquad \delta_{ij} = 0$$

Quel est l'énoncé de la propriété ainsi établie ?

PROBLEME N° 2

1. Soit g la fonction définie pour $u \in \mathbb{R}^{\times}$ par :

$$g(u) = \frac{u^3}{e^u - 1}$$

Comment faut-il choisir $g(0)$ pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$ M

2. Montrer la convergence de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} g(u)du$$

(On ne cherchera pas à calculer J)

3. Soit f la fonction définie par $f(0) = 1$ et pour $x \in \mathbb{R}^\times$ par :

$$f(x) = 1 + x^4 \int_0^{1/x^2} g(u)du$$

(a) Montrer la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer pour x non nul la dérivée $f'(x)$ de f.

(c) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 4, au voisinage de 0, puis le développement limité de f' à l'ordre 3, au voisinage de 0 (on donne $J = \dfrac{\pi^4}{15}$)