CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1986

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout nombre entier naturel p, on considère la fonction A_p définie sur $[0;+\infty[$ par la relation :

$$A_p(x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$$

Dans ce problème, on étudie la suite des nombres réels positifs (x_n) tels que $A_{2n-1}(x_n)=0$ où $n\geqslant 1$, ce qui fait l'objet de la **partie III**. Dans les **parties I et II**, on établit des résultats auxiliaires.

Partie I

Dans cette partie, on étudie un algorithme d'approximation de l'unique solution de l'équation $f(t)=t$, où, pour tout nombre réel positif t :

$$f(t)=e^{-1-t}$$

1. (a) Construire sur une même figure les représentations graphiques de la fonction f et de la fonction $t\mapsto t$.
   (b) Montrer que l'équation $f(t)=t$ admet une solution a et une seule.
   (c) Montrer que, pour tout couple (x,y) de nombres réels positifs :

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{e}\,|x-y|$$

   (d) Prouver que l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{e}\right]$ est stable par f et que a appartient à cet intervalle.

2. Soit u la suite numérique définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et la condition initiale $u_0 = 0$.

   (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{e} \qquad \text{et} \qquad |u_n - a| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}}$$

   En déduire que la suite u converge et donner sa limite.

   (b) Déterminer un nombre entier naturel n_0 tel que :

$$|u_{n_0} - a| \leqslant 10^{-6}$$

   Écrire des valeurs décimales approchées à la précision 10^{-6} des termes u_n, où $1 \leqslant n \leqslant n_0$.

Partie II

On se propose d'étudier les suites v et w définies par les relations :

$$v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \qquad w_n = \frac{n^n}{n!} \qquad \text{où } n \geqslant 1$$

1. Trouver une relation simple entre $\ln(v_n)$ et $\ln(w_n)$.

2. *Minoration de w*

   (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

   (b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$$

   (c) En déduire que, si $n \geqslant 6$, alors $w_n \geqslant 2^n$.

   (d) Déterminer un majorant de la suite $(v_n)_{n \geqslant 6}$.

3. *Convergence de la suite v*

   (a) Déterminer la limite de la suite : $(\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n))$.

   (b) Établir que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant x - \ln(1 + x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

   En déduire que :

$$0 \leqslant 1 + \ln(w_n) - \ln(w_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2n}$$

   (c) Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0; 1[$:

$$x \leqslant -\ln(1 - x)$$

   En déduire que :

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln(n)$$

   (d) Prouver finalement que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\ln(w_n) = 1$.

   En déduire la limite de la suite v.

   Peut-on retrouver ainsi la majoration obtenue dans la question **II**.2d ?

Partie III : *Étude de la suite* (x_n)

1. (a) Prouver que, pour tout nombre entier naturel p et pour tout nombre réel positif x :
$$e^{-x} = A_p(x) + (-1)^{p+1} I_p(x) \qquad \text{où} \qquad I_p(x) = \int_0^x e^{-t} \frac{(x-t)^p}{p!} dt$$
   (b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel positif x :
$$A_{2n+1}(x) \leqslant e^{-x} \leqslant A_{2n}(x) \tag{1}$$
   (c) Exprimer la dérivée A'_{p+1} en fonction de A_p.
   (d) Prouver que, pour tout nombre entier naturel non nul n, la fonction A_{2n-1} est strictement décroissante et que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, l'équation $A_{2n-1}(x) = 0$ admet une solution x_n et une seule.
   Calculer $A'_{2n}(x_n)$ et dresser le tableau de variation de A_{2n-1} et de A_{2n}.

2. Soit n un nombre entier naturel non nul.
   (a) Montrer que :
$$A_{2n}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad A_{2n+1}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{x_n}{2n+1}\right)$$
   (b) En déduire que $\dfrac{x_n^{2n}}{(2n)!} \leqslant 1$. À l'aide de la majoration établie au **II**.2d, montrer que si $n \geqslant 3$, $x_n \leqslant n$.
   Vérifier directement que ce dernier résultat est encore valable si $n = 1$ et si $n = 2$.
   (c) Montrer que $A_{2n+1}(x_n) > 0$. En déduire que la suite (x_n) est strictement croissante.

3. Soit n un nombre entier naturel non nul.
   (a) À l'aide de (1) et de la majoration $x_n \leqslant n$, établir l'encadrement :
$$1 \leqslant \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} e^{x_n} \leqslant 2$$
   (b) On pose $y_n = \dfrac{x_n}{2n}$. Montrer que :
$$v_{2n} \leqslant y_n e^{y_n} \leqslant 2^{1/2n} v_{2n}$$
   (c) En déduire que la suite de terme général $z_n = y_n e^{y_n}$ converge vers $\dfrac{1}{e}$.

4. En conclure que la suite (y_n) converge vers a (On étudiera à cet effet la fonction $y \mapsto ye^y$))