CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1987

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère la fonction numérique f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$$

1. Etudier les variations de f et construire la courbe représentative de cette fonction.

2. Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à la parabole d'équation

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

3. Pour tout élément x de l'intervalle $]0,1[$, calculer $\int_0^1 f(t)dt$.

   En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^1 f(t)dt$

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3

   (a) Calculer :

   $$\frac{1}{n}\left[f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})\right]$$

   On utilisera la relation : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) Prouver que :

$$\int_{1/n}^{1} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{1/n}^{1} f(t)dt$$

5. A l'aide des questions précédentes, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = -1$$

EXERCICE 2

I.

On considère la matrice carrée d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver toutes les matrices carrées réelles B d'ordre 3 telles que $AB = 0$.
   Déterminer la dimension de l'espace vectoriel formé par ces matrices B.

2. Trouver toutes les matrices carrées réelles B d'ordre 3 telles que $AB = BA = 0$.
   Déterminer la dimension de l'espace vectoriel formé par ces matrices B.

3. Calculer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, expliciter une base de vecteurs propres.

II.

Plus généralement, soit E une espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, où n est un nombre entier naturel non nul. On considère des endomorphismes u et v de E.

1. On suppose que :

$$vu = uv = 0$$

   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \ker(u)$.

   (b) Montrer que :

$$\dim\ker(u) + \dim\ker(v) \geqslant n$$

2. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \ker(u)$. Montrer que $uv = vu = 0$.

3. La propriété $uv = 0$ implique-t-elle la propriété $vu = 0$? Donner éventuellement un contre-exemple.

EXERCICE 3

Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 4$, on pose :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 0 && \text{si } x < 0 \\ f_n(x) &= \frac{a_n}{(x+1)^n} && \text{si } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

où a_n est un réel.

1. Pour quelle valeur de a_n la fonction f_n est-elle une densité de probabilité ?

2. On prend désormais pour a_n la valeur trouvée dans la question 1). On note X_n une variable aléatoire réelle de densité f_n.

(a) Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.

(b) On pose $Y_n = X_n + 1$. Calculer l'espérance et la variance de Y_n. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

3. Soit $Z_n = -X_n$.

(a) Trouver la fonction de répartition G_n et la densité de probabilité g_n de Z_n.

(b) Pour tout nombre réel x, on pose $G(x) = \lim_{n \to +\infty} G_n(x)$. Montrer que la fonction G ainsi définie est une fonction de répartition. Quelle est la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z ayant G pour fonction de répartition ?