CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1987

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Objectif du problème: dans la première partie, on approche $\alpha = (1/2)^{1/3}$ à l'aide d'une suite numérique. Dans la seconde, on approche sur l'intervalle $[0,1]$ la fonction $t \to t^{1/3}$ à l'aide d'une suite de fonctions polynomiales et on évalue la rapidité de la convergence.
On notera qu'une valeur approchée de α à la précision 10^{-9} est $0,793\,700\,526$.

Première partie : Approximation de α

Soit λ un nombre réel strictement positif. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par la relation:

$$f_\lambda(x) = x + \lambda\left(\frac{1}{2} - x^3\right)$$

1. Montrer que α est l'unique solution de l'équation $f_\lambda(x) = x$.

2. (a) Calculer la dérivée de f_λ. Montrer que f_λ est croissante sur $[0,1]$ si et seulement si $\lambda \leqslant \dfrac{1}{3}$.
   On suppose désormais que cette condition est satisfaite.

   (b) Prouver que l'intervalle $]\alpha, 1]$ est stable par f_λ, c'est à dire que:

   $$f_\lambda(]\alpha,1]) \subset]\alpha,1]$$

   (c) Montrer que, pour tout élément x de $]\alpha,1]$:

   $$0 \leqslant f_\lambda(x) - \alpha \leqslant (x-\alpha) f'_\lambda(\alpha)$$

3. Soient c un élément de $]\alpha, 1]$ et v la suite définie par la relation de récurrence:

$$v_{n+1} = v_n + \lambda \left(\frac{1}{2} - v_n^3 \right)$$

   (a) Montrer que la suite v est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.

   (b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$0 < v_n - \alpha \leqslant (c - \alpha) \left[f'_\lambda(\alpha) \right]^n$$

   (c) Montrer que $f'_\lambda(\alpha)$ est minimal si et seulement si $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

4. On suppose que $\lambda = \dfrac{1}{3}$ et on prend $v_0 = c = 0,8$. Calculer v_n pour $n \leqslant 8$.
Montrer que $0 < c - \alpha < 7.10^{-3}$ et majorer $v_n - \alpha$. (Dans cette question, on n'utilisera pas la valeur approchée de α donnée dans l'énoncé.)

Deuxième partie : Approximation polynomiale de $t \to t^{1/3}$

Pour tout élément t de l'intervalle $[0, 1]$, on considère la suite $(u_n(t))$ définie par la relation de récurrence:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{3} \left[t - u_n(t)^3 \right]$$

et la condition initiale $u_0(t) = 0$.

1. (a) Calculer $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, la fonction $t \to u_n(t)$ est une fonction polynomiale et déterminer son degré.

2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$t^{1/3} - u_{n+1}(t) = \left[t^{1/3} - u_n(t) \right] \left(1 - \frac{1}{3} \left[t^{2/3} + t^{1/3} u_n(t) + u_n(t)^2 \right] \right)$$

   (b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n(t) \leqslant t^{1/3}$.

   (c) En déduire que la suite de terme général $u_n(t)$ est croissante et positive.

   (d) Montrer que la suite $(u_n(t))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $t^{1/3}$.

3. Montrer que pour tout nombre entier naturel n:

$$t^{1/3} \left(1 - t^{2/3} \right)^n \leqslant t^{1/3} - u_n(t) \leqslant t^{1/3} \left(1 - \frac{1}{3} t^{2/3} \right)^n$$

4. Pour tout nombre entier naturel non nul n, soit φ_n l'application de $[0, 1]$ dans R définie par la relation:

$$\varphi_n(x) = x \left(1 - \frac{1}{3} x^2 \right)^n$$

   (a) Étudier les variations de φ_n et déterminer son maximum.

   (b) On pose:

$$\beta_n = \sup_{t \in [0,1]} \left[t^{1/3} - u_n(t) \right]$$

   Montrer que:

$$\beta_n \leqslant \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

(c) Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif γ tel que, pour tout nombre entier naturel non nul n:

$$\beta_n \geqslant \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$$

(d) Plus précisément, soit p un nombre entier naturel non nul . Montrer, que pour tout nombre entier naturel n tel que $n \geqslant p$, on a:

$$e^{-1/2}\sqrt{\frac{1}{2n+1}} < \beta_n \leqslant \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^p \sqrt{\frac{3}{2n+1}}$$