CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1988

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le but du problème est d'étudier les fonctions polynômes P à coefficients réels telles que, pour tout x réel :

$$(x-1)P"(x) + 4xP'(x) = \lambda P(x) \tag{1}$$

où λ est un nombre réel donné et où P' et $P"$ désigne les dérivés première et seconde de P. Dans la **partie I**, on détermine à partir d'une suite $(P_0, P_1, ..., P_n, ...)$ de solutions particulières toutes les solutions de cette équation et on établit une relation de récurrence satisfaite par les polynômes P_n. Dans la **partie II**, on utilise cette relation pour obtenir le comportement de la suite des valeurs $(P_n(x))$ en un point x donné, en commençant par le cas particulier où $x = \dfrac{5}{3}$.

PARTIE I : ÉTUDE DE L'EQUATION (1)

1. Soit P une solution non nulle de (1), de degré n

   (a) Montrer, en identifiant dans (1) les termes de plus haut degré, que λ est nécessairement égal à $n(n+3)$.

   (b) Soit $Q(x) = (-1)^n P(-x)$. Montrer que Q est solution de (1). En étudiant le degré du polynôme $P-Q$, prouver que $P = Q$ et en déduire la parité de P en fonction de n.

2. Inversement, on se propose de prouver qu'étant donné un entier $n \geqslant 0$, il existe un polynôme P à coefficients réels et un seul dont le terme de plus haut degré est x^n et tel que, pour tout réel x :

$$(x-1)P + 4xP = n(n+3)P \tag{2}$$

   (a) Déterminer P_0, P_1, P_2.

(b) Dans le cas général, on pose : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} a_{2k}x^{n-2k} = a_0x^n + a_2x^{n-2} + ... + a_{2k}x^{n-2k} + ...$ avec $a_0 = 1$ où E désigne le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$.
Expliciter un système linéaire satisfait par les nombres a_{2k}, où $0 \leqslant 2k \leqslant n$, et montrer que ce système admet une solution et une seule (que l'on ne demande pas d'expliciter). Donner l'expression du coefficient a_2.

3. À partir de la suite (P_n), déterminer, selon les valeurs de λ, l'ensemble E_λ des solutions de (1).

4. On se propose d'établir que, pour tout réel x et tout nombre entier $n \geqslant 2$:

$$P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{n^2-1}{4n^2-1}P_{n-2}(x) = 0 \tag{3}$$

(a) On considère, pour $n \geqslant 2$, la fonction polynôme :

$$Q_n(x) = (x^2-1)P'_n(x) - nxP_n(x).$$

Déterminer le monône de plus haut degré de Q.
Montrer que $Q'_n(x) = (n+2)(nP_n(x) - xP'_n(x))$, et calculer $(x^2-1)Q''_n(x) + 4xQ'_n(x)$ en fonction de $Q_n(x)$ seulement.
En déduire que :

$$(x^2-1)P'_n(x) - nxP_n(x) + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}(x) = 0 \tag{4}$$

(b) En dérivant (4), et en recourant par exemple à l'expression de la dérivée de Q_n obtenue précédemment, donner une relation entre P_n, P'_net P'_{n-1}.
En utilisant à nouveau la relation (4), en déduire la relation (3).

PARTIE II : ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE $(P_n(x))$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{9}[(u_{n-1} - u_{n-2}) + \frac{3}{4n^2-1}u_{n-2}] \tag{5}$$

avec $n \geqslant 2$, et les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1 + \frac{1}{9}$.

1. En remarquant que :

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1})$$

calculer pour tout entier $n \geqslant 2$: $\quad S_n = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{4k^2-1}$
Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

2. On se propose, dans cette question, d'étudier la suite (u_n) définie ci dessus.

(a) Montrer, par récurrence, que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant 1$.
(b) Prouver que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$u_n = u_1 + \frac{1}{9}\left[(u_{n-1} - u_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{4k^2-1}u_{k-2}\right] \tag{6}$$

et en déduire, pour tout entier naturel n, que $u_n \leqslant \frac{6}{5}$.

(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et, à l'aide de (6), donner un encadrement de sa limite L permettant d'en obtenir une valeur décimale approchée à $0,01$ près.

3. On reprend dans cette question les notations de la première partie et, pour tout entier naturel n et pour tout réel $t > 0$, on pose :
$$u_n(t) = \frac{2^n}{e^{nt}} P_n(\frac{e^t + e^{-t}}{2})$$

(a) Montrer que, pour tout réel $x > 1$, il existe un nombre réel $t > 0$ et un seul tel que :
$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

(b) Calculer $u_0(t)$ et $u_1(t)$, et montrer que, pour tout $n \geqslant 2$:
$$u_n(t) - u_{n-1}(t) = e^{-2t}[(u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)) + \frac{3}{4n^2 - 1} u_{n-2}(t)] \tag{7}$$

(c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, les fonctions $u_n$et $(u_n - u_{n-1})$ sont strictement positives et décroissantes sur $]0, +\infty[$.

(d) Expliciter le réel e^t quand $x = \frac{5}{3}$, et montrer que, dans ce cas, les suites (u_n) et $(u_n(t))$ définies respectivement par les relations (5) et (7) sont les mêmes.
On suppose que $x \geqslant \frac{5}{3}$. Déduire des résultats précédents que la suite $(u_n(t))$ converge vers une limite strictement positive $L(x)$ que l'on ne demande pas d'expliciter, et en déduire un équivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.