CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1989

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt.$$

1. (a) Étudier la parité de f.
   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
   (c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. (a) Montrer que f est dérivable et que :
   $$f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$
   (b) Étudier la variation de f. Préciser les points où f présente un extremum.
   (c) Calculer la dérivée seconde de f et déterminer le signe de $f''(x)$.
   (d) Construire la courbe réprésentative de f. (On admettra que le maximum de f est sensiblement égal à 0.3.)
3. On considère une variable aléatoire réelle X qui suit une loi normale centrée d'écart-type σ. Pour tout nombre réel strictement positif a, on note $p(a)$ la probabilité de l'événement :
   $$a \leqslant X \leqslant 2a.$$
   Déterminer la valeur de a pour laquelle $p(a)$ est maximal.

EXERCICE 2

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$$

et la condition initiale $u_0 = 1$.

1. Montrer que la suite u est bien définie.
2. Étudier la monotonie de la suite u. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
3. Pour tout nombre entier naturel k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k.
En déduire la limite de $u_{k+1}^2 - u_k^2$ lorsque k tend vers $+\infty$.
4. Pour tout nombre entier naturel n, on pose :
$$v_n = \frac{u_n^2}{4}.$$
   (a) Montrer que pour tout nombre entier naturel k :
   $$v_{k+1} - v_k \geqslant 1.$$
   En déduire que tout nombre entier naturel non nul n :
   $$v_n \geqslant n.$$
   (b) Montrer que, pour tout nombre entier $k \geqslant 1$:
   $$v_{k+1} - v_k \leqslant 1 + \frac{1}{k}.$$
   (c) Prouver que, pour tout entier $k \geqslant 2$:
   $$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}.$$
   (d) Déduire des questions 4b et 4c que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$v_n - v_0 \leqslant n + \frac{1}{v_0} + 1 + \ln n.$$
5. Déterminer la limite du rapport $\frac{v_n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
En déduire un équivalent de u_n.

EXERCICE 3

On désigne par n un nombre entier strictement supérieur à 1.
Un sac contient des boules rouges et des boules blanches, indiscernables si ce n'est par la couleur. La proportion de boules rouges est p, où $0 < p < 1$; celle des boules blanches est $q = 1 - p$. On effectue une suite de tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée après chaque tirage, selon la règle suivante :

- dès qu'une boule rouge est tirée, on arrête les tirages ;
- si les n premières boules tirées sont blanches, on arrête les tirages.

1. Soit Ω l'ensemble des suites de couleurs de boules qu'on peut tirer selon cette règle. (Ces suites sont de longueur finie au plus égale à n.)

   (a) Montrer que Ω possède $n+1$ éléments.

   (b) Déterminer la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ associé à cette expérience aléatoire (où $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω).

2. On note N, X_1, X_2 les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de tirages effectués, le nombre de boules blanches tirées et le nombre de boules rouges tirées.

   (a) Établir une relation simple entre ces trois variables aléatoires.

   (b) Déterminer les lois de probabilité de ces trois variables et exprimer leur espérance en fonction de n et q.

3. Trouver la loi de la variable $Z = X_1 X_2$ et calculer son espérance. En déduire l'expression de la covariance de X_1 et X_2 en fonction de n et q.

4. Pour tout couple (j, k) de nombres entiers naturels non nuls tels que $j + k \leqslant n$, calculer la probabilité conditionnelle :

$$P(N = j + k \,/N > k).$$

   Quand vaut-elle $P(N = j)$?