CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1990

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Soit f une fonction continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a<b$. L'objet de ce problème est l'étude d'approximations de l'intégrale $J = \int_a^b f(x)dx$ par la méthode des rectangles, c'est à dire par la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \text{ avec : } x_k = a + k\frac{b-a}{n} \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n$$

puis, de façon plus performante, par les suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$et $(w_n)_{n\geqslant 1}$définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad v_n = 2u_{2n} - u_n \quad w_n = \frac{4v_{2n} - v_n}{3}$$

Partie I : Etude d'un premier exemple

Dans cette partie on suppose que $[a,b] = [0,1]$ et que : $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$.

1. Écrire un algorithme de calcul de u_n lorsque l'entier naturel non nul n est donné. À l'aide de cet algorithme, remplir le tableau suivant :

u_1	v_1	w_1
u_2	v_2	w_2
u_4	v_4	w_4
u_8	v_8	
u_{16}		

(on donnera les résultats numériques de ce tableau avec six décimales)

2. Calculer l'intégrale J. Évaluer la précision des résultats numériques obtenus ci-dessus.

Partie II : Etude d'un second exemple

Dans cette partie, on considère un réel λ strictement positif et différent de 1. On suppose que $[a, b] = [0, \pi]$ et que :

$$f(x) = \ln(\lambda^2 - 2\lambda \cos x + 1).$$

1. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Déterminer sous forme trigonométrique les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

   $$y^{2n} - 1 = 0.$$

   (b) En déduire, en comparant leur coefficients dominants et leurs racines, l'égalité suivante entre polynômes :

   $$y^{2n} - 1 = (y^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(y^2 - 2ycos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$$

2. (a) Déduire de la question précédente une expression simplifiée de u_n et de v_n.

   (b) En distinguant les cas $\lambda<1$ et $\lambda>1$, calculer l'intégrale J en déterminant la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, puis donner des équivalents de $u_n - J$ et de $v_n - J$.

Partie III : Etude du cas général

On suppose désormais que la fonction f est de classe C^4sur $[a, b]$. Pour tout nombre entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant 4$, on pose :

$$M_k = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f^{(k)}(x)$$

1. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans $[a, b]$. On considère la fonction auxiliaire p définie sur $[\alpha, \beta]$ par la relation :

   $$p(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt - (x - \alpha)f(\alpha).$$

   (a) Calculer les deux premières dérivées de p.

   (b) Montrer que, pour tout élément x de $[\alpha, \beta]$ on a : $|p(x)| \leqslant M_1$.
   En déduire par intégration un encadrement de $p(x)$ pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, puis établir l'inégalité suivante :

   $$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - (\beta - \alpha)f(\alpha) \right| \leqslant \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} M_1$$

   (c) En appliquant cette inégalité aux segments $[x_k, x_{k+1}]$ pour $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, Prouver enfin que :

   $$|J - u_n| \leqslant \frac{(b - a)^2}{2n} M_1$$

2. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans $[a, b]$. On considère la fonction auxiliaire q définie sur $[\alpha, \beta]$ par la relation :

   $$q(x) = p(x) - \frac{(x - \alpha)(f(x) - f(\alpha))}{2}.$$

   (a) Calculer les deux premières dérivées de q.

(b) Établir l'inégalité suivante :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - (\beta-\alpha)f(\alpha) - \frac{(\beta-\alpha)(f(\beta)-f(\alpha))}{2} \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}M_2.$$

(On pourra encadrer $q_J(x)$ sur $[\alpha, \beta]$, puis par intégration, en déduire un encadrement de $q(x)$.)

(c) Prouver enfin que :

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2n} \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2.$$

3. On considère cette fois la fonction auxiliaire r définie sur $[\alpha, \beta]$ par la relation :

$$r(x) = q(x) + \frac{(x-\alpha)^2(f(x)-f(\alpha))}{12}.$$

En procédant encore de la même manière, établir que :

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2n} + \frac{(b-a)^2(f(b)-f(a))}{12n^2} \right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{720n^4}M_4.$$

4. Déterminer à l'aide des résultats précédents le développement limité à l'ordre 3 de u_n, c'est à dire des nombres réels A, B, C et D tels que :

$$u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

En déduire les développements limités à l'ordre 3 de $v_n$et de w_n. Conclure.