CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Etant donné un nombre entier naturel non nul n et un ensemble E à n éléments, on appelle *involution* de E toute bijection f de E sur lui même telle que $f \circ f = Id$, où Id désigne l'application identique de E. L'objectif du problème est l'étude du nombre T_n d'involutions de E et, en particulier, la recherche d'un équivalent du nombre T_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie I Etude du nombre T_n d'involutions de E

1. Calculer T_1, T_2 et T_3.
2. On suppose désormais $n \geqslant 3$.
   (a) Déterminer en fonction de T_i, où $1 \leqslant i < n$:
   - le nombre des involutions σ de $\{1, ..., n\}$ telles que $\sigma(n) = n$;
   - le nombre des involutions σ de $\{1, ..., n\}$ telles que $\sigma(n) = k$, où k est un nombre entier donné de $\{1, ..., n-1\}$

   (b) En déduire la relation suivante :
   $$T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2} \tag{1}$$
3. Rédiger en PASCAL un algorithme permettant le calcul des p premiers termes de la suites (T_n) pour un nombre entier donné $p \geqslant 3$.
   En programmant cet algorithme, expliciter les valeurs de T_n pour $n \leqslant 10$.

Partie II Interprétation de T_n à l'aide d'une suite de polynômes

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$u(x) = exp(\frac{x^2}{2})$$

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par $u^{(n)}$ la dérivée $n^{ème}$ de u. On note H_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$u^{(n)}(x) = H_n(x)u(x) \tag{2}$$

1. (a) Exprimer $u'(x)$ en fonction de $u(x)$ et x.
   En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier $n \geqslant 2$:

   $$u^{(n)}(x) = xu^{(n-1)}(x) + (n-1)u^{(n-2)}(x) \tag{3}$$

   (b) Calculer H_0 et H_1, puis déduire des relations précédentes l'expression de $H_n(x)$ en fonction de $H_{n-1}(x)$, $H_{n-2}(x)$ et x.

   (c) Prouver que H_n est un polynôme dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le signe sur $[0, +\infty[$.

   (d) Comparer T_n et $H_n(1)$.

2. (a) En dérivant la relation (2) et en utilisant la relation entre $H_{n+1}(x), H_n(x), H_{n-1}(x)$ et x, établir la relation suivante, pour tout nombre entier naturel non nul n :

   $$H'_n(x) = nH_{n-1}(x) \tag{4}$$

   (b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $H_n(0)$ et $H'_n(0)$ en fonction de n. (On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

3. (a) Etablir que, pour tout nombre entier naturel n :

   $$H''_n(x) + xH'_n(x) - nH_n(x) = 0$$

   (on pourra dériver deux fois la formule (2.)

   (b) Dans toute la suite du problème, pour tout nombre entier naturel n, on note v_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

   $$v_n(x) = H_n(x)\exp(\frac{x^2}{4})$$

   Etudier le signe de v_n et de v'_nsur $[0, +\infty[$. Calculer $v_n(0)$et $v'_n(0)$.

   (c) Exprimer $v''_n(x)$ en fonction de $v_n(x)$et de x.

   (d) En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

   $$(n + \frac{1}{2})v_n(x) \leqslant v''_n(x) \leqslant (n + \frac{3}{4})v_n(x) \tag{5}$$

Dans toute la suite du problème, on posera :

$$\alpha_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \qquad \beta_n = \sqrt{n + \frac{3}{4}}$$

Partie III Recherche d'un équivalent de T_n

On étudie tout d'abord un équivalent de T_n lorsque l'entier $n = 2p$ est pair.

1. On établit dans cette question un résultat préliminaire permettant d'encadrer une fonction numérique définie sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives, de classe C^2 et satisfaisant aux relations :

$$\alpha^2 f(x) \leqslant f"(x) \leqslant \beta^2 f(x) \quad f(0) = a \quad f'(0) = 0 \tag{6}$$

où a, α et β sont des nombres réels strictements positifs donnés.

   (a) Déterminer des nombres réels λ et μ tels que la fonction numérique φ définie sur $[0,1]$ par la relation :

$$\varphi(x) = \lambda \exp(\beta x) + \mu \exp(-\beta x)$$

   vérifie $\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = 0$.
   Indiquer alors le signe de φ sur $[0,1]$ et exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

   (b) Soit w la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par la relation :

$$w = f\varphi' - \varphi f'$$

   Calculer $w(0)$. Etudier le signe de w', puis celui de w.

   (c) En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$, l'inégalité

$$f(x) \leqslant \varphi(x)$$

   (d) Etablir, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$, l'inégalité suivante :

$$f(x) \leqslant \frac{a}{2}(\exp(\beta x) + 1) \tag{7}$$

   (e) Etablir de même que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$:

$$\frac{a}{2}\exp(\alpha x) \leqslant f(x) \tag{8}$$

2. (a) A l'aide de la relation (5), établir que, pour tout nombre entier naturel p :

$$H_{2p}(0)\frac{\exp(\alpha_{2p})}{2} \leqslant \exp(\frac{1}{4})H_{2p}(1) \leqslant H_{2p}(0)\frac{\exp(\beta_{2p}) + 1}{2}$$

   (b) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$
   D'après la **partie II** : $H_{2p}(0) = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$
   En déduire que, pour $n = 2p$, on a :

$$T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\frac{1}{4})\exp(\sqrt{n})(\frac{n}{e})^{\frac{n}{2}} \tag{9}$$

   (c) Donner une valeur approchée du quotient des deux nombres de cette expression pour $n = 10$.
   On étudie enfin un équivalent de T_n lorsque l'entier n est impair ($n = 2p + 1$).

3. On établit par des méthodes analogues à celles de la question III.1. que, si g est une fonction numérique sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives sur $]0,1]$ de classe C^2 et satisfaisant aux relations :

$$\alpha^2 g(x) \leqslant g''(x) \leqslant \beta^2 g(x) \quad g(0) = 0 \quad g'(0) = a \tag{10}$$

où a, α et β sont des nombres réels strictement positifs donnés, alors, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$:

$$\frac{a}{2\alpha}(\exp(\alpha x) - 1) \leqslant g(x) \leqslant \frac{a}{2\beta}\exp(\beta x)$$

(on ne demande pas de justifier cet encadrement)

(a) En déduire que, pour $n = 2p + 1$:

$$H_n(1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{n}\exp(-\frac{1}{4})\exp(\sqrt{n})H_{n-1}(0)$$

(b) En conclure que la relation (9) est encore valable lorsque le nombre entier n est impair.