CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{si} \quad x > 0, \qquad f(0) = 1$$

Dans la partie II, on établit l'existence des *moments* $I_p = \int\limits_0^{+\infty} x^p f(x)dx$ où p est un entier naturel, puis on exprime ces moments en fonction des séries $A_p = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^{p+2}}$.

Dans la partie III, on établit un procédé d'approximation des nombres A_p.

Partie I

1. (a) Etudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.
   (b) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

2. (a) Calculer la dérivée f' de f sur $]0,+\infty[$.
   (b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
   (c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $[0,+\infty[$?

3. Etudier les variations de la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 - x - e^{-x}$$

   En déduire le signe de $f'(x)$.

4. Etudier les variations de la fonction ψ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\psi(x) = (x+2) + (x-2)e^x$$

   En déduire le signe de $f''(x)$ pour $x > 0$.

5. Donner une représentation graphique de f.

Partie II

Dans cette partie et jusqu'à la fin du problème, p désigne un entier naturel.

1. Dans cette question, λ est un réel strictement positif.

   (a) Etablir la convergence de l'intégrale :

   $$K(p, \lambda) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-\lambda x} dx$$

   et calculer $K(0, \lambda)$.

   (b) Etablir une relation simple entre $K(p, \lambda)$ et $K(p+1, \lambda)$
   On utilisera une intégration par parties.

   (c) En déduire par récurrence la valeur de $K(p, \lambda)$.

2. (a) Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$,

   $$f(x) \leqslant e^{-\frac{x}{2}}$$

   (b) Démontrer que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} x^p f(x) dx$ converge.
   Dans toute la suite du problème, on pose :

   $$I_p = \int_0^{+\infty} x^p f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} dx$$

3. Calcul de I_p.

   (a) Etablir la convergence de la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$. On note

   $$A_p = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$$

   (b) Pour $x \in]0, +\infty[$ et n entier supérieur ou égal à 1, établir que

   $$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

   (c) En déduire que :

   $$I_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$$

   (d) Exprimer I_0 à l'aide de A_0.

   (e) En adaptant la méthode précédente, exprimer I_p en fonction de A_p.

Partie III

On étudie une méthode de calcul approché de A_p.

1. Première approximation

   (a) Soit x un nombre réel et g une fonction de classe C^2 définie sur $\left[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right]$ à valeurs réelles. Etablir la relation :

   $$g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{x}^{x+\frac{1}{2}} (t-x-\frac{1}{2})^2 g''(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{x-\frac{1}{2}}^{x} (t-x+\frac{1}{2})^2 g''(t)\,dt$$

   On pourra intégrer par parties les deux dernières intégrales apparaissant dans la formule.

   (b) En déduire que pour k entier supérieur ou égal à 1, on a :

   $$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}}\right| \leqslant \frac{(p+2)(p+3)}{24(k-\frac{1}{2})^{p+4}}$$

   (c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1, montrer que :

   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{p+4}} \leqslant \frac{1}{(p+3)(n-\frac{1}{2})^{p+3}}$$

   et en déduire, à l'aide de (b), que :

   $$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}}\right| \leqslant \frac{p+2}{24(n-\frac{1}{2})^{p+3}}$$

   (d) Exemple.
   On pose : $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{3(n+\frac{1}{2})^3}.$
   Proposer un majorant de $|A_2 - u_n|$.
   Pour quelle valeur minimale de n peut-on affirmer que : $|A_2 - u_n| < 10^{-6}$?

2. Deuxième approximation

   (a) On reprend les notations et les hypothèses de la question (III-1.a) et on suppose de plus que g est de classe C^4. Montrer que :

   $$g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(t)\,dt - \frac{g''(x)}{24} - \frac{1}{24}\left(\int_{x}^{x+\frac{1}{2}} (t-x-\frac{1}{2})^4 g^{(4)}(t)\,dt + \int_{x-\frac{1}{2}}^{x} (t-x+\frac{1}{2})^4 g^{(4)}(t)\,dt\right)$$

   (b) En déduire que pour k entier supérieur ou égal à 1 :

   $$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} + \frac{(p+2)(p+3)}{24k^{p+4}}\right| \leqslant \frac{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}{1\,920(k-\frac{1}{2})^{p+6}}$$

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}} + \frac{(p+2)(p+3)}{24} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+4}}\right| \leqslant \frac{(p+2)(p+3)(p+4)}{1\,920(n-\frac{1}{2})^{p+5}}$$

(d) Pour n entier supérieur ou égal à 1, on pose :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + \frac{1}{(p+1)(n+\frac{1}{2})^{p+1}} - \frac{p+2}{24(n+\frac{1}{2})^{p+3}}$$

En utilisant les résultats des questions III.1.c) et III.2.c), proposer un majorant de $|A_p - v_n|$.

(e) Exemple. On fait $p = 0$.
Pour quelle valeur minimale de n peut-on affirmer que : $|A_0 - v_n| \leqslant 10^{-6}$?