CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1996

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice I

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Dans tout l'exercice on associe à tout nombre réel a les vecteurs U_a, V_a et W_a définis par :

$$\begin{aligned} U_a &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ V_a &= -e_1 + (a-3)e_2 + (a-1)e_3 \\ W_a &= -2e_1 - 4e_2 + ae_3 \end{aligned}$$

et l'endomorphisme Φ_a de $\mathbb{R}^3$ défini par les conditions :

$$\Phi_a(e_1) = U_a, \;\; \Phi_a(e_2) = V_a, \;\; \Phi_a(e_3) = W_a$$

1. Montrer que Φ_0 est un automorphisme et déterminer la matrice de son automorphisme réciproque, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
2. (a) Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles Φ_a est un automorphisme.
   (b) Déterminer, pour chaque valeur du paramètre a, le noyau de Φ_a.
   (c) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ appartient à l'image de Φ_a.
3. On considère maintenant les trois vecteurs :

   $f_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$

   $f_2 = 2e_1 + 4e_2 - e_3$

   $f_3 = e_3$.

(a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est; une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de Φ_1 dans cette base.
(b) L'endomorphisme Φ_1 est-il diagonalisable ?

4. (a) Déterminer les valeurs propres de Φ_{-2} .
   (b) Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice II

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(1) = 1$ et

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}\frac{\ln(x)}{2} \quad \text{si} \quad x \neq 1$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Etudier son signe et en déduire que f est monotone sur chacun de ces deux intervalles.
3. Montrer que pour tout x strictement positif et différent de 1, la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x) = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

   En déduire que f est dérivable au point 1 et déterminer $f'(1)$.
   Montrer que f' est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
4. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $\ln(x) < (x-1)$. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $f(x) < x$.
5. Donner la représentation graphique de la fonction f .
6. Soit a un réel supérieur à 1.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de réels vérifiant $x_0 = a$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$
   (b) Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle admet une limite ℓ que l'on précisera.
7. On se propose d'étudier la vitesse avec laquelle la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers ℓ.
   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $|f(x_n) - \ell| \leq \frac{1}{3} |x_n - \ell|$ pour tout $n \geq n_0$
   (b) En déduire que la suite $(x_n - \ell)_0$ est négligeable devant la suite $(1/2^n)_{n\geq 0}$

Exercice III

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^\times$ l'ensemble des entiers strictement positifs
Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p pour les blanches, q pour les noires et r pour les rouges $(p + q + r = 1)$
On fait dan cette urne des tirages successifs indépendants umérotés 1, 2, ... etc. Ces tirages sont faits avec relise de la boule tirée. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.
Toutes les variables aléatoires sont définies dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la prenrière fois. Trouver la loi de probabilité de X_1 ; calculer son espérance et sa variance.
2. On note X_2 la variable aléatoire représentant le numéro du deuxième tirage d'une boule blanche.

(a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l), la probabilité de l'événement .$\{X_1 = k\ ,\ X_2 = k$. En déduire la loi de probabilité de X_2

(b) Montrer que la variable $U_2 = X_2 - X_1$ est indépendante de X_1 et qu'elle a la même loi de probabilité. En déduire l'espérance et la variance de X_2.

3. On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Pour tout couple (k, l) de $\mathbb{N}^{\times} \times \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement $\{W = l\}$ sachant que $X_1 = k$. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $X_1 = k$?

4. On note Y_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

   (a) Trouver 1a loi de probabilité du couple (X_1, Y_1). Les variables aléatoires X_1 et Y_1sont elles indépendantes ?

   (b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $r = 0$ (c'est à dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1

5. Soit, pour n entier strictement positif, Z_n la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si au $n^{ième}$ tirage une boule blanche est tirée, -1 si au $n^{ième}$ tirage une boule noire est tirée, 0 si au $n^{ième}$ tirage une boule rouge est tirée. On note $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$

   (a) Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance ; en déduire l'espérance et la variance de S_n pour tout $n \geq 1$.

   (b) Soit t un réel strictement positif. On pose $V_n = t^{S_n}$. Trouver la loi de probabilité de la variable V_1 et calculer son espérance.

   (c) En déduire l'espérance de V_n.