CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 1996

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux. On note $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients réels et I_p la matrice identité. Pour tout élément M de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, on note $a_{i,j}(M)$ le coefficient de M situé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.
Une matrice M appartenant à $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si elle satisfait au deux conditions suivantes :

1. Pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, $a_{i,j}(M) \geqslant 0$
2. Pour tout entier i compris entre 1 et p, $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}(M) = 1$.

On dit qu'une suite indexée par n, $(M_n) = (M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots)$ de matrices appartenant à $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers un élément M de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ si, pour tout couple (i,j), la suite des coefficients $a_{i,j}(M_n)$ converge vers $a_{i,j}(M)$; on dit alors que M est la limite de la suite (M_n).
Étant donné une matrice A appartenant à $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, pour tout entier $n \geqslant 0$, on note C_n la matrice définie par la relation :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\left[I_p + A + A^2 + \ldots + A^n\right] \tag{1}$$

On dit enfin qu'une matrice A de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ est r-périodique, où r est un entier strictement positif, si $A^r = I_p$.
L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des matrices stochastiques et notamment, la convergence de la suite (C_n) lorsque A est stochastique et r-périodique.

Partie I : Étude d'exemples

1. Soit α un nombre réel. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}\left[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n\right]$$

   (a) Calculer γ_n, en distinguant deux cas : $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$.

   (b) Étudier en fonction de α, la convergence de la suite (γ_n) et, en cas de convergence, préciser sa limite.

2. **Premier exemple d'étude de** (C_n)

   On prend $p = 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer A^2 et A^3. En déduire A^k pour tout entier k. On distinguera trois cas selon que $k = 3h$, $k = 3h + 1$ et $k = 3h + 2$.

   (b) Pour tout entier q, calculer C_{3q}, C_{3q+1} et C_{3q+2}. En déduire que la suite (C_n) converge et préciser sa limite C.

   (c) Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à C. Déterminer le noyau F de v, et prouver que son image G est la droite vectorielle $\mathbb{R}e$ de vecteur directeur $e = \dfrac{1}{3}\left[e_1 + e_2 + e_3\right]$. Prouver que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires et que v est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F.

3. **Deuxième exemple d'étude de** (C_n)

   On prend $p = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   On note w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

   (a) Déterminer les valeurs propres de w et une base (f_1, f_2) de vecteurs propres de w.

   (b) Déterminer une matrice inversible P telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} P^{-1}$$

   En déduire une expression de A^k, pour tout entier $k \geqslant 0$.

   (c) Déterminer deux matrices U et V appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, telles que, pour tout $k \geqslant 0$:

$$A^k = U + \left(-\frac{1}{6}\right)^k V$$

   (d) Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer C_n en fonction de n, U et V et déterminer la limite C de la suite (C_n).

   (e) Prouver que l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à C est un projecteur dont on précisera le noyau F et l'image G.

Partie II : Étude de C_n lorsque A est r-périodique

On désigne par r un entier strictement positif.

1. Soit (α_k) une suite r-périodique de nombres réels, c'est à dire telle que, pour tout entier naturel $k \geqslant 0$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On pose :

$$\gamma = \frac{1}{r}\left[\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1}\right]$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}\left[\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n\right] \tag{2}$$

(a) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$\gamma = \frac{1}{r}\left[\alpha_k + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_{k+r-1}\right]$$

(b) Montrer que la suite de terme général

$$\beta_n = (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma$$

est r-périodique. En déduire que (β_n) est bornée.

(c) Établir que (γ_n) converge et préciser sa limite.

2. Soit A une matrice r-périodique appartenant à $M_p(R)$.

(a) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et p, la suite de terme général $\alpha_k = a_{i,j}(A^k)$ est r-périodique. En déduire que la suite (C_n) converge vers :

$$C = \frac{1}{r}\left[I_p + A + \ldots + A^{r-1}\right]$$

(b) Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés aux matrices A et C. Prouver que $u^r = I$, où I est l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^p$. Montrer que $v \circ u = u \circ v$ et que $u \circ v = v$

(c) Soit x un élément de $\mathbb{R}^p$. Prouver que $u(x) = x$ si et seulement si $v(x) = x$, puis que x appartient à $\mathrm{Im}(v)$ si et seulement si $u(x) = x$. En déduire que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u - I)$.

(d) Montrer que v est le projecteur sur $G = \mathrm{Im}(v)$ parallèlement à $F = \mathrm{Ker}(v)$.

(e) Établir enfin que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u - I)$: on pourra d'abord prouver que $\mathrm{Im}(u - I) \subset \mathrm{Ker}(v)$

3. (a) Soit (α_k) une suite de nombres réels r-périodique *à partir d'un certain rang* positif m, c'est à dire telle que pour tout $k \geqslant m$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On définit (γ_n) par la relation (2). Prouver que γ_n admet une limite que l'on précisera. Pour cela, on pourra considérer la suite $\alpha'_k = \alpha_{k+m}$, observer que (α'_k) est r-périodique, et prouver que, γ'_n étant associée à (α'_k) par la relation (2), $\gamma'_n - \gamma_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Soit A une matrice de $\mathbb{M}_p(R)$ r-périodique *à partir d'un certain rang* positif m, c'est à dire telle que pour tout $k \geqslant m$, $A^{k+r} = A^k$. Prouver que la suite (C_n) admet une limite que l'on précisera.

Partie III : Étude de matrices stochastiques

On note S_p l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathfrak{M}_p(R)$ et D_p l'ensemble des matrices *déterministes*, c'est à dire stochastiques et dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Enfin, on note Δ_p l'ensemble des matrices déterministes et inversibles.

1. **Matrices stochastiques**

(a) Prouver que, pour tout couple (λ, μ) de nombres réels tels que $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ et $\lambda + \mu = 1$, et pour tout couple (M, N) d'éléments de S_p, $\lambda M + \mu N$ appartient encore à S_p.

(b) Prouver que le produit MN de deux éléments M et N de S_p appartient à S_p.

(c) Soit A un élément de S_p. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$, C_n (définie par (1)) appartient à S_p. Que peut-on en déduire pour la limite C de (C_n), lorsqu'elle existe ?

2. **Matrices déterministes**

(a) Montrer qu'une matrice M est déterministe si et seulement si tous ses coefficients sont égaux à 0 ou 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

(b) En déduire que D_p est un ensemble fini et préciser le nombre de ses éléments.

(c) Montrer que le produit MN de deux éléments M et N de D_p appartient à D_p.

(d) Soit A une matrice déterministe. Prouver qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ et un entier $m \geqslant 0$ tels que $A^{m+r} = A^m$. En déduire que, dans ces conditions, A est r- périodique *à partir de ce rang* m et que, si de plus A est inversible, A est r-périodique.

(e) Soit A une matrice déterministe inversible. Prouver que A^{-1} l'est aussi.

3. **Étude de la suite C_n associée à une matrice A déterministe**

(a) En utilisant les résultats de la partie II, établir le résultat suivant :
Soit A une matrice déterministe inversible, alors (C_n) converge vers une matrice stochastique C telle que $C^2 = C$.

(b) Étendre ce résultat au cas où A est déterministe **non inversible**.

4. **Matrices stochastiques inversible**
Soient X et Y des éléments de S_p tels que $XY = I_p$. On se propose de montrer que X et Y sont déterministes inversibles.

(a) Prouver que Y est une matrice inversible, et que X l'est aussi.

(b) On pose $X = (\alpha_{i,j})$, $Y = (\beta_{i,j})$ et, pour tout j compris entre 1 et p,

$$\mu_j = \max\{\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \ldots, \beta_{p,j}\}$$

Prouver que $\mu_j = 1$. Pour cela, on pourra calculer le coefficient $a_{j,j}(XY)$.

(c) Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \beta_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j$. En déduire que tous les coefficients de Y sont égaux à 0 ou 1.

(d) Prouver que Y et X appartiennent à Δ_p.

(e) Plus généralement, soient U et V deux matrices de S_p telles que le produit UV appartienne à Δ_p. Prouver que U et V appartiennent à Δ_p. (On pourra utiliser le résultat de la question III.2e)