

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION SCIENTIFIQUE**

**MATHEMATIQUES I**

**Année 1998**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

L'objet de ce problème est l'étude d'un algorithme d'approximation d'une racine carrée de certains éléments de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est à dire la construction d'une suite convergeant vers un élément dont le carré est donné.

**Partie I : Algorithme de Newton dans  $\mathbb{R}$**

Soit  $a$  un réel strictement positif.

1. (a) Donner le tableau de variation de la fonction définie, pour  $x$  élément de  $\mathbb{R}_+^\times$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$$

- (b) Justifier rapidement l'existence de la suite réelle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la donnée de  $x_0 = a$  et de la relation de récurrence :  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .
- (c) Pour tout entier naturel  $n$ , établir les égalités :

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n} (x_n - \sqrt{a})^2 \quad \text{et} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2x_{n+1}} (a - x_{n+1}^2)$$

- (d) En déduire que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sqrt{a}$ .
2. (a) Pour tout entier naturel non nul, prouver les inégalités :

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (x_n - \sqrt{a})^2$$

- (b) Soit  $b$  un réel strictement positif et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels positifs vérifiant l'inégalité :  $u_{n+1} \leq bu_n^2$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .  
Pour tout entier naturel non nul  $n$ , donner une majoration de  $u_n$  en fonction de  $n, b, u_1$ .
- (c) En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, une majoration de  $x_n - \sqrt{a}$  en fonction de  $n, x_1$  et  $a$ .
3. (a) En décrivant pas à pas les étapes de l'algorithme, que dire du résultat rendu par le programme suivant quand on l'exécute ?

```

program racine carree ;
function rc(a,x,eps :real) :real;
begin
if abs(x*x-a) <eps then rc :=x else
begin
x:=1/2*(x+a/x);
rc:=rc(a,x,eps) ;
end;
end;
begin writeln(rc(2,2,1e-16)) ;
end.

```

- (b) On rappelle les inégalités :  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ .  
Montrer que, lors de l'exécution du programme précédent, le nombre de comparaisons effectuées est inférieur ou égal à six. On supposera le type *real* suffisamment étendu pour pouvoir manipuler des nombres à une précision d'au moins vingt décimales.

## Partie II : Algorithme de Newton dans $\mathbb{C}$

On se propose dans cette partie d'adapter la méthode de Newton à la recherche d'une racine carrée d'un nombre complexe  $a$ , c'est à dire d'approcher un nombre complexe dont le carré vaut  $a$ . Dans toute cette partie,  $a$  désigne un nombre complexe qui n'est pas un réel négatif ou nul.

On note  $Re(z)$  la partie réelle d'un nombre complexe  $z$ .

- (a) Montrer qu'il existe un unique nombre complexe  $b$  de partie réelle strictement positive tel que  $b^2 = a$ .  
On note  $\mathcal{P}_+ = \left\{ z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \left( \frac{z}{b} \right) > 0 \right\}$ .
- (b) Dans cette sous question (et uniquement ici) on suppose que  $a = 2i$ . Déterminer le nombre  $b$  dans ce cas particulier et représenter l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  est élément de  $\mathcal{P}_+$ .
- On revient au cas général (où le nombre complexe  $a$  n'est pas un réel négatif ou nul) et on considère l'application  $f$  définie pour tout nombre complexe  $z$  non nul par  $f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{a}{z} \right)$ .  
Établir l'inclusion :  $f(\mathcal{P}_+) \subset \mathcal{P}_+$ .
- On considère la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la donnée de  $z_0 = a$  et par la relation de récurrence :  $z_{n+1} = f(z_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .  
On pose également :  $w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - Justifier l'existence des suites  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - Exprimer, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $w_n$  en fonction de  $w_{n-1}$ , puis, pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n$  en fonction de  $w_0$  et  $n$ .
- Prouver la majoration  $|w_0| < 1$ . En déduire la limite de la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Partie III : Racine carrée d'une matrice

Dans cette partie  $n$  désigne un entier naturel au moins égal à 2.

- On note  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels ayant  $n$  lignes et  $n$  colonnes.
- On note  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices colonnes à coefficients réels ayant  $n$  lignes et une colonne.
- On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne usuelle dont on note  $\|\cdot\|$  la norme.
- On identifie les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  aux éléments de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de telle sorte que si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  on écrira

$$Mx \text{ pour } M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Soit  $A$  une matrice carrée à coefficients réels. On appelle racine carrée de  $A$  toute matrice  $B$  vérifiant  $B^2 = A$ .

### A. Quelques exemples

1. Montrer que la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'admet pas de racine carrée.
2. On se propose, dans cette question, de généraliser le résultat de la question précédente. On considère l'élément de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$  est donc la matrice dont le coefficient en ligne  $i$  et colonne  $j$  est nul sauf si  $1 \leq i \leq n-1$  et  $j = i+1$  auquel cas il vaut 1.

On suppose qu'il existe une matrice  $B$  racine carrée de  $A$  et on note  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  ayant, dans la base canonique,  $B$  pour matrice.

- (a) L'endomorphisme  $g$  est-il bijectif ?
  - (b) Prouver que  $\text{Im}(g)$  est stable par  $g$  (c'est à dire que  $g(\text{Im}(g)) \subset \text{Im}(g)$ ), puis que la restriction de  $g$  à  $\text{Im}(g)$  est un automorphisme de  $\text{Im}(g)$ .
  - (c) Que vaut  $g^{2n}$  ? En déduire que la matrice  $A$  n'a pas de racine carrée.
3. Donner un exemple d'élément de  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  possédant une infinité de racines carrées.

### B. Racine carrée d'une matrice symétrique strictement positive

On note  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ . On appelle matrice symétrique strictement positive, tout élément de  $\mathcal{S}_n$  dont les valeurs propres sont strictement positives. On note  $\mathcal{S}_n^+$  l'ensemble des matrices symétriques réelles strictement positives. On suppose désormais que  $A$  est un élément de  $\mathcal{S}_n^+$ .

1. Montrer que  $A$  admet une racine carrée symétrique réelle strictement positive. On pourra commencer par le cas où  $A$  est diagonale.
2. Soit  $B$  et  $C$  deux racines carrées symétriques réelles strictement positives de  $A$ .

- (a) Justifier l'existence de deux matrices  $P$  et  $Q$  inversibles et de deux matrices diagonales  $D$  et  $\Delta$  telles que :  $A = PD^2{}^tP = Q\Delta^2{}^tQ$ .
- (b) En déduire l'existence d'une matrice inversible  $R$  telle que  $RD^2 = \Delta^2R$ .  
Établir l'égalité  $RD = \Delta R$ . On comparera les coefficients de ligne  $i$  et de colonne  $j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) de ces deux matrices .
- (c) Conclure qu'il existe une unique racine carrée de  $A$  symétrique réelle strictement positive, que l'on notera  $A^{1/2}$ .

Jusqu'à la fin de cette partie B, on note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $A$  et, pour tout entier  $j$ ,  $1 \leq j \leq p$ ,  $E_j$  le sous espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_j$ .

3. Pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j \leq p$  et pour tout réel  $x$ , on pose :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

- (a) Montrer que la famille  $(L_1, L_2, \dots, L_p)$  est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré strictement inférieur à  $p$ .
- (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  à coefficients réels de degré strictement inférieur à  $p$  tel que, pour tout entier  $i$  de  $\{1, 2, \dots, p\}$ ,  $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ .
- (c)
  - i. Pour tout entier  $j$ ,  $1 \leq j \leq p$  et pour tout vecteur  $x_j$  de  $E_j$ , calculer  $P(A)(x_j)$  et en déduire l'égalité :  $P(A)^2 = A$ .
  - ii. Montrer que les valeurs propres de  $P(A)$  sont toutes strictement positives.
  - iii. Conclure à l'égalité :

$$A^{1/2} = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} L_i(A)$$

#### 4. Un exemple

On considère les éléments de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  suivants :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & n & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & n \end{pmatrix}$$

$U$  est donc la matrices dont tous les coefficients sont égaux à 1 et  $A$  celle dont le coefficient en ligne  $i$  et colonne  $j$  vaut  $n$  si  $i = j$  et  $-1$  sinon.

- (a) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de  $U$  et de  $A$ .
- (b) Exprimer  $A^{1/2}$  en fonction de  $A$  et  $I_n$  (matrice identité de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ).

### Partie IV : Algorithme de Newton dans $\mathcal{S}_n^+$

Dans toute cette partie on considère un élément  $A$  de  $\mathcal{S}_n^+$  et une base orthonormée  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ , le vecteur propre  $e_i$  étant, pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . (les réels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  n'étant pas nécessairement distincts).

1. Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{S}_n^+$  dont  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est aussi une base de vecteurs propres. On note  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  les valeurs propres correspondantes (i.e.  $Me_i = \mu_i e_i$ , pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ).  
Montrer que  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est encore une base de vecteurs propres de la matrice  $M' = \frac{1}{2}(M + M^{-1}A)$ .  
Pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , quelle relation existe-t-il entre la valeur propre  $\mu'_i$  de  $M'$  associée à  $e_i$  et  $\mu_i$  ?

2. (a) Déduire de la question précedente qu'il est possible de définir une suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{S}_n^+$  telle que :  $A_0 = A$  et, pour tout entier naturel  $k$ ,  $A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + A_k^{-1}A)$ .
- (b) Pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , on note  $\lambda_{i,k}$  la valeur propre de  $A_k$  associée à  $e_i$ .  tudier, pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , la convergence de la suite  $(\lambda_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ .
3. On dit qu'une suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  converge vers la matrice  $M$  de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  s'il existe une base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que, pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|M_k \varepsilon_i - M \varepsilon_i\| = 0$ .
- Montrer que la suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $A^{1/2}$ .