CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2000

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les **parties III** et **IV** sont indépendantes des **parties I** et **II**.

Partie I

On considère la fonction indéfiniment dérivable φ définie, pour tout réel x de $[0,1[$, par: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. Pour tout réel x de $[0,1[$ et tout entier naturel n, établir l'égalité

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n n!}(1-x)^{-\dfrac{2n+1}{2}}$$

où $\varphi^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de φ (avec, en particulier, $\varphi^{(0)} = \varphi$).

2. Pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$, justifier l'égalité suivante

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^{k}}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)dt$$

3. (a) Pour tout entier naturel n, prouver l'inégalité : $C_{2n+2}^{n+1} \leqslant 4^{n+1}$.
   (b) Pour tout couple (t,x) de réels tel que $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, vérifier les inégalités: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.
   (c) En déduire que, pour tout réel x de $[0,1[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)dt = 0$$

4. Pour tout réel x de $[0,1[$, démontrer l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^{k}}{4^k} x^k$$

Partie II

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Sur cet espace, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X_1, cette loi étant définie par

$$P([X_1 = 1]) = P([X_1 = -1]) = \frac{1}{2}$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Par exemple, S_n pourrait représenter l'abscisse (aléatoire) au temps n d'une particule se déplaçant sur un axe et partie de l'origine au temps 0, qui saute à chaque instant d'une unité à gauche ou d'une unité à droite avec une égale probabilité.
On note $\min R$ *le plus petit élément d'une partie non vide R de $\mathbb{N}$.*
On pose aussi, pour tout élément ω de Ω,

$$R_\omega = \{n \in \mathbb{N}^\times / S_n(\omega) = 0\} \text{ et } T(\omega) = \begin{array}{lll} \min R_\omega & \text{si} & R_\omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{si} & R_\omega = \emptyset \end{array}$$

On **admet** que T est une variable aléatoire.
Ainsi T pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du premier retour à l'origine de la particule évoquée plus haut.
Pour tout entier naturel n, on note E_n l'événement $E_n = [T > n] \cup [T = 0]$.

1. Soit n un entier naturel non nul. On pose $A_n = [S_n = 0]$ et, pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$A_k = (([S_k = 0] \cap [S_{k+1} \neq 0] \cap [S_{k+2} \neq 0] \cap \cdots \cap [S_n \neq 0]]) = ([S_k = 0] \cap (\bigcap_{i=k+1}^{n} [S_i \neq 0]))$$

   Ainsi, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, A_k serait l'événement :
   "Pour la dernière fois avant l'instant n la particule est à l'origine à l'instant k".

   (a) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, justifier l'égalité suivante

   $$P(A_k) = P([S_k = 0])P(E_{n-k})$$

   (b) En déduire l'égalité: $1 = \sum\limits_{k=0}^{n} P([S_k = 0])P(E_{n-k})$
   On **admet** que, si deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à termes **positifs ou nuls**, sont telles que les séries de termes généraux a_n et b_n convergent, alors en posant, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, la série de terme général c_n converge et sa somme vérifie

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

2. Pour tout réel x de $[0,1[$, établir l'égalité

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P([S_n = 0])x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n)x^n\right)$$

3. (a) Pour tout entier naturel n, calculer $P([S_n = 0])$.

(b) À l'aide de la **partie I**, en déduire que, pour tout réel x de $[0,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(c) En remarquant que l'événement $[T=0]$ est inclus dans E_n pour tout entier naturel n, montrer que l'on a: $P([T=0]) = 0$.
Ainsi, presque sûrement, la particule citée en exemple, revient à l'origine.

Partie III

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel x de $[0,1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge. Pour tout réel x de $[0,1[$, on note $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et l'on suppose que :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} (\sqrt{1-x}\, f(x)) = \sqrt{\pi}$$

1. (a) Pour tout entier naturel p, déterminer: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (\sqrt{1-x} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k})$.

   (b) Pour tout entier naturel p, justifier la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$, et, en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{2(p+1)t}$, calculer sa valeur.

   (c) En déduire l'égalité

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} (\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$$

2. Montrer que, pour toute application polynomiale réelle Q, on a:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} (\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k)) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} Q(e^{-t}) dt$$

3. Soit h la fonction définie, pour tout réel x de $[0,1[$, par:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, 1[\end{cases}$$

   (a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt$ et donner sa valeur.

   (b) Soit x un réel de $[0,1[$. En déterminant la valeur de $h(x^k)$ pour k assez grand, justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.

4. **On admet** l'égalité: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (\sqrt{1-x} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k h(x^k)) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt$

   En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que, lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ est équivalent à $2\sqrt{n}$.

Partie IV

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **décroissante** de réels **positifs ou nuls** et, pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

On fait l'hypothèse que, lorsque n tend vers $+\infty$, S_n est équivalent à $2\sqrt{n}$. On va montrer qu'alors a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
On notera $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

1. Soit (α, β) un couple de nombres réels vérifiant: $0 < \alpha < 1 < \beta$. Pour tout entier naturel n tel que $n \neq \lfloor \alpha n \rfloor$ et $n \neq \lfloor \beta n \rfloor$, justifier l'encadrement

$$\frac{S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leqslant a_n \leqslant \frac{S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}$$

2. (a) Soit γ un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux $\dfrac{n}{\lfloor \gamma n \rfloor}$ et $\dfrac{S_{\lfloor \gamma n \rfloor}}{\sqrt{n}}$.
   (b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n assez grand, on a

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leqslant \sqrt{n} a_n \leqslant \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon$$

3. En déduire qu'on a: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} a_n = 1$.

Partie V

1. (a) À l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\sum\limits_{k=0}^{n} P(T > k)$.
   (b) En déduire un équivalent de $P(T > n)$.
2. La variable aléatoire T possède-t-elle une espérance ?
3. Pour tout réel x de $[0, 1]$, prouver l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P([T = n]) x^n = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

4. Soit n un entier naturel.
   (a) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n de la fonction $u \mapsto \sqrt{1 + u}$.
   (b) En déduire le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre $2n$ de la fonction :

$$x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

   (c) Montrer que, au voisinage de 0 on a aussi:

$$1 - \sqrt{1 - x^2} = \sum_{k=0}^{2n} P([T = k]) x^k + o(x^{2n})$$

(d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a:

$$P([T=2n]) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{C_{2n}^n}{4^n}$$

On rappelle qu'il y a unicité du développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre $2n$ d'une fonction.
Pour tout élément ω de Ω, on pose :

$$R'_\omega = \{n \in \mathbb{N}^\times / \ n > T(\omega)\} \text{ et } S_n(\omega) = 0 \text{ et } T_2(\omega) = \left\{ \begin{array}{ccc} \min R'_\omega & \text{si} & R'_\omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{si} & R'_\omega = \emptyset \end{array} \right. \quad \}$$

On **admet** que T_2 est une variable aléatoire.
Ainsi T_2 pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du deuxième retour à l'origine de la particule.

5. (a) Pour tout entier naturel n non nul, démontrer l'égalité :

$$P([T_2 = 2n]) = \sum_{k=0}^{n} P([T=2k])P([T=2n-2k])$$

(b) En déduire la valeur de $P((T_2 = 0])$ puis, pour tout réel x de $[0,1]$, l'égalité:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P([T_2 = n])x^n = (1-\sqrt{1-x^2})^2$$

6. Déterminer la loi de T_2.