CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2002

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une fonction réelle f de classe C^∞ sur $[-1,1]$, et on note $I(f)$ l'intégrale : $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
Pour tout entier naturel k non nul , on pose :

$$M_k(f) = \sup_{x\in[-1,1]} f^{(k)}(x), \text{ où } f^{(k)} \text{ désigne la dérivée d'ordre } k \text{ de } f.$$

Les polynômes considérés sont à coefficients réels, et on confond polynôme et fonction polynomiale associée.
Pour tout entier naturel m, on note $\mathbb{R}_m[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à m.
On rappelle que si $r_1, r_2, \dots, r_p$ sont des racines réelles distinctes d'un polynôme P, avec des multiplicités respectives $k_1, k_2, \dots, k_p$, alors il existe un polynôme Q tel que $P = Q\prod_{i=1}^{p}(X-r_i)^{k_i}$.
Enfin, $a_1, a_2, \dots, a_n$ désignent n réels deux à deux distincts de $[-1,1]$, et on note A_n le polynôme :

$$A_n = \prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$$

L'objet de ce problème est l'approximation de $I(f)$ par des intégrales de fonctions polynomiales.

Préliminaire

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Soit g une fonction de classe C^n sur $[-1,1]$, s'annulant en $n+1$ points distincts de $[-1,1]$.
   (a) Montrer que la dérivée de g s'annule en au moins n points distincts de $]-1,1[$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel c de $]-1,1[$ tel que $g^{(n)}(c)=0$.

Partie I

Dans cette partie, on va proposer comme valeur approchée de $I(f)$ la valeur de l'intégrale obtenue en remplaçant la fonction f par la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$, introduite ci-dessous, qui coïncide avec f sur chacun des points a_i.

Pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note L_i le polynôme : $L_i = \prod_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\} \\ k\neq i}} (X - a_k)$.

Par exemple, si $n = 3$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, et $a_3 = 1$, alors : $L_1 = X(X-1)$, $L_2 = (X-1)(X+1)$, $L_3 = X(X+1)$.

1. (a) Vérifier que, pour tous entiers i et j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, le réel $L_i(a_j)$ est nul lorsque i est différent de j, et est non nul lorsque i est égal à j.

   (b) Montrer qu'il existe un **unique** polynôme, que l'on note P_f, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que, pour tout entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a l'égalité $P_f(a_j) = f(a_j)$, et que ce polynôme est donné par la formule :
$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i$$

2. Pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose : $\delta_i = \frac{1}{L_i(a_i)} \int_{-1}^{1} L_i(x)dx$.

   Montrer que : $\int_{-1}^{1} P_f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(a_i)$.

   Dans toute la suite, on note : $J_n(f) = \int_{-1}^{1} P_f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(a_i)$.

3. Que peut-on dire de $I(f)$ et $J_n(f)$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$?

4. Soit x un élément fixé de $[-1, 1]$, distinct de chacun des réels a_i.

   (a) Justifier l'existence d'un réel λ vérifiant l'égalité : $f(x) - P_f(x) - \lambda A_n(x) = 0$.
   On note maintenant g_λ l'application qui à tout réel t de $[-1, 1]$ associe :
$$g_\lambda(t) = f(t) - P_f(t) - \lambda A_n(t)$$

   (b) Calculer $g_\lambda(a_i)$ pour chaque entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

   (c) Montrer qu'il existe un réel c de $]-1, 1[$ tel que $g_\lambda^{(n)}(c) = 0$, puis établir l'égalité :
$$\lambda = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

5. En déduire que, pour tout réel x de $[-1, 1]$, $\quad |f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{M_n(f)}{n!} |A_n(x)|$.
   puis établir l'inégalité :
$$|I(f) - J_n(f)| \leqslant \frac{M_n(f)}{n!} \int_{-1}^{1} |A_n(x)|\, dx$$

6. Dans cette question, on suppose que $a_1 = -1$, $a_n = 1$ et que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont répartis régulièrement, c'est-à-dire que, pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $a_i = -1 + \frac{2(i-1)}{n-1}$.

   (a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et soit x un réel de $[a_k, a_{k+1}]$. Justifier l'inégalité :
$$|A_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^n k!(n-k)!$$

(b) En déduire que, pour tout réel x de $[-1,1]$, on a : $|A_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$.

(c) **On admet** que, quand l'entier naturel p tend vers l'infini, on a l'équivalence suivante : $p! \underset{p\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{p}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p}$.

Montrer que, si l'entier n est assez grand, on a, pour tout réel x de $[-1,1]$, la majoration :

$$|A_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

Partie II

Dans cette partie, on va proposer comme valeur approchée de $I(f)$ la valeur de l'intégrale obtenue en remplaçant la fonction f par une certaine fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$, qui réalise une approximation de f plus fine que la fonction polynomiale de la partie précédente.

Pour tout polynôme Q, on note Q' le polynôme dérivé de Q.

1. On considère l'application T de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ T(Q) = (Q(a_1), Q(a_2), \ldots, Q(a_n), Q'(a_1), Q'(a_2), \ldots, Q'(a_n))$$

(a) Montrer que T est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

(b) Montrer que T est injective (*on rappelle qu'un réel a est racine au moins double d'un polynôme Q si et seulement si $Q(a) = Q'(a) = 0$*). En déduire que T est bijective.

(c) Utiliser la question précédente pour montrer qu'il existe un unique polynôme, noté Q_f, de degré inférieur ou égal à $2n-1$, tel que, pour tout entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$Q_f(a_j) = f(a_j) \text{ et } Q'_f(a_j) = f'(a_j)$$

(on ne demande pas d'expliciter Q_f)

Dans toute la suite, on note : $K_n(f) = \int_{-1}^{1} Q_f(x)dx$.

2. Que peut-on dire de $I(f)$ et $K_n(f)$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$?

3. Par une méthode analogue à celle de la partie précédente, on pourrait démontrer, et **on admettra**, la majoration :

$$|I(f) - K_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} A_n^2(x)dx$$

Que vaut le polynôme Q_f lorsque f est la fonction polynomiale $x \mapsto A_n^2(x)$?
Montrer que, dans ce cas, l'inégalité précédente est une égalité.

4. Soit Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

Montrer que Φ est un produit scalaire.

5. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est maintenant muni de ce produit scalaire.

(a) Justifier l'existence d'un polynôme V de degré au plus $n-1$ vérifiant : $Q_f - P_f = A_n V$.
En déduire que si le polynôme A_n est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $K_n(f) = J_n(f)$.

(b) Inversement, si le polynôme A_n n'est pas orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe une fonction f telle que $K_n(f) \neq J_n(f)$.

Partie III

Dans cette partie, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est toujours muni du produit scalaire Φ introduit dans **II.**4).
On note R_n l'image du polynôme X^n par la projection orthogonale sur le sous espace-vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on pose : $S_n = X^n - R_n$. Ainsi, S_n est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et $X^n = R_n + S_n$.

1. En se plaçant dans le cas particulier où $n = 3$, déterminer S_3.

2. On revient désormais au cas général.

   (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de S_n.

   (b) Justifier l'égalité : $\int\limits_{-1}^{1} S_n(x)dx = 0$.
   En déduire que le polynôme S_n admet au moins une racine dans $]-1, 1[$.

3. On se propose de montrer que S_n admet exactement n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

   (a) On suppose qu'il existe un réel α et un polynôme Q tels que $S_n = (X - \alpha)^2 Q$.
   Aboutir à une contradiction en considérant le signe de $S_n Q$ et la valeur de $\Phi(S_n, Q)$.
   En déduire que toutes les racines réelles de S_n sont simples.

   (b) Soit p le nombre de racines distinctes de S_n qui appartiennent à $]-1, 1[$, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ces racines.
   On définit le polynôme :
   $$U = \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$$
   Montrer que le polynôme $S_n U$ est de signe constant sur $[-1, 1]$, et en déduire, en considérant $\Phi(S_n, U)$, que p n'est pas inférieur ou égal à $n - 1$.
   Conclure que S_n admet exactement n racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dans $]-1, 1[$, et que :
   $$S_n = \prod_{j=1}^{n}(X - \alpha_j)$$

   Dans toute la suite du problème, on suppose que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, et on conserve toutes les notations précédentes. En particulier, on a maintenant $A_n = S_n$, et, avec les réels $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ introduits dans la partie I, (et qui sont indépendants de f), on note toujours $J_n(f) = \int\limits_{-1}^{1} P_f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i f(\alpha_i)$.

4. En utilisant les résultats de la **partie II**, montrer que :
   $$|I(f) - J_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} S_n^2(x)dx$$

5. En se plaçant à nouveau dans le cas particulier où $n = 3$, montrer que :
   $$J_3(f) = \frac{1}{9}\left(5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})\right)$$

6. *Étude des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$*

   (a) En considérant $J_n(f)$ lorsque f est constante égale à 1, donner la valeur de $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$.

(b) Pour chaque entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, montrer, en considérant la valeur de $J_n(f)$ lorsque f est la fonction polynomiale $x \mapsto L_j^2(x)$, que δ_j est positif.

(c) On suppose dans cette question que les racines de S_n sont numérotées par ordre croissant, c'est-à-dire :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$$

Justifier que $S_n(-X) = (-1)^n S_n(X)$.
En déduire que les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont répartis symétriquement par rapport à 0, autrement dit que pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a l'égalité : $\alpha_{n+1-i} = -\alpha_i$.
En conclure que, pour tout entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a l'égalité : $\delta_{n+1-j} = \delta_j$.

7. *Majoration de* $\int_{-1}^{1} S_n^2(x)dx$

(a) Montrer que pour tout polynôme P de degré n et de coefficient dominant 1, on a l'inégalité :

$$\int_{-1}^{1} S_n^2(x)dx \leqslant \int_{-1}^{1} P^2(x)dx$$

(b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, il existe un polynôme T_k de degré k et de coefficient dominant 1 tel que, pour tout réel θ : $\cos(k\theta) = 2^{k-1}T_k(\cos\theta)$.
En déduire la majoration :

$$\int_{-1}^{1} S_n^2(x)dx \leqslant \frac{\pi}{2^{2n-2}}$$