CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On note E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite réelle $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$, dite adaptée à f, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) = s_n f(nx) \tag{1}$$

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Les polynômes considérés sont à coefficients réels, et tout polynôme P sera confondu avec la fonction polynomiale, élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui lui est naturellement associée.
Pour tout entier naturel p non nul, et toute fonction p fois dérivable f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivée p-ème de la fonction f est notée $f^{(p)}$ (la dérivée première de f est aussi notée f').
On rappelle que, T étant un réel non nul, une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite T-périodique lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

L'objet du problème est de déterminer certaines des fonctions f satisfaisant l'équation (1).

Partie I Résultats généraux et exemples d'éléments de E

1. Soit f une fonction appartenant à E, autre que la fonction nulle.
   Montrer qu'il existe une *unique* suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ adaptée à f, et que $s_1 = 1$.

2. Montrer que si f est une fonction dérivable appartenant à E, alors la dérivée f' de f appartient à E.

3. Montrer que les fonctions constantes appartiennent à E.

4. Soit A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x - \dfrac{1}{2}$. Etablir que A est élément de E.

5. E constitue-t-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

6. Soit χ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, déterminer, en distinguant les cas $nx \in \mathbb{Z}$ et $nx \notin \mathbb{Z}$, la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi(x + \dfrac{k}{n})$. En déduire que χ appartient à E, la suite adaptée étant constante, égale à 1.

7. (a) Pour tout réel x et tous entiers naturels non nuls p et n, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi(x+\frac{k}{n})}$, et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2p\pi(x + \frac{k}{n})) = \begin{cases} n\cos(2p\pi x) & \text{si } p \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (b) Soit u la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\cos(2\pi x)$. Montrer que u appartient à E, et préciser la suite adaptée à u.

   (c) Justifier, pour tout réel x, la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)$.

   Soit alors v la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\sum\limits_{q=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)$.

   Montrer que v appartient à E, et préciser la suite adaptée à v.

Partie II Recherche des polynômes éléments de E

1. (a) Montrer que si P est un polynôme de degré 1 élément de E, alors la suite adaptée au polynôme P est constante, égale à 1.

   (b) Quels sont les polynômes de degré 1 appartenant à E ?

2. On suppose dans cette question que P est un polynôme non nul élément de E, et on note p le degré de P.

   (a) Montrer que la suite adaptée à P est la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad s_n = \frac{1}{n^{p-1}}$$

   (b) Montrer que, si p est au moins égal à 1, on a l'égalité : $\int\limits_0^1 P(t)dt = 0$.

3. Établir que, pour tout polynôme Q, il existe un unique polynôme P tel que $P' = Q$ et $\int\limits_0^1 P(t)dt = 0$.

   On peut donc définir une suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de polynômes de la manière suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad B'_p = pB_{p-1} \quad \text{et} \quad \int\limits_0^1 B_p(t)dt = 0 \end{cases}$$

4. (a) Déterminer, pour chaque entier naturel p, le degré et le coefficient dominant de B_p.

   (b) Vérifier, pour tout réel x, l'égalité : $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$, puis calculer $B_2(x)$ pour tout réel x.

5. On a déjà vu dans la partie I que B_0 et B_1 sont des éléments de E. Vérifier que B_2 est élément de E.

6. Soit p un entier naturel non nul. On suppose que B_{p-1} est élément de E et on veut montrer que B_p est élément de E. Pour cela, on fixe un entier naturel non nul n et on pose, pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p(x + \frac{k}{n}) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx)$$

   (a) Montrer que la fonction $\varphi - \psi$ est constante.

   (b) Calculer $\int_0^{1/n} \varphi(x)dx$ et $\int_0^{1/n} \psi(x)dx$.

   (c) Établir que $\varphi - \psi = 0$ et conclure.

7. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel p, les polynômes de degré p qui appartiennent à E sont exactement les polynômes λB_p obtenus lorsque λ décrit $\mathbb{R}^\times$.

Partie III Étude des fonctions indéfiniment dérivables de E

1. Soit δ la fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui-même qui, à toute fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, associe la fonction $\delta(\varphi)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta(\varphi)(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

   (a) Montrer que δ est linéaire. Quelle propriété caractérise les éléments de son noyau ?

   (b) Vérifier que, lorsque P est une fonction polynomiale, il en est de même de $\delta(P)$, puis préciser le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$ lorsque P est de degré p supérieur ou égal à 1.

2. Montrer que, si f est une fonction élément de E, de suite adaptée $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad s_n \delta(f)(nx) = \delta(f)(x) \tag{2}$$

3. Soit g une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha g(2x) = g(x) \tag{3}$$

   (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha^k g(x) = g(\frac{x}{2^k}) \tag{4}$$

   (b) Montrer que si $\alpha = 0$, alors g est nulle.

   (c) Montrer que si $|\alpha| > 1$, alors g est nulle.

   (d) On suppose $0 < |\alpha| \, \alpha \leqslant 1$. Justifier l'existence d'un entier naturel p et d'un réel β tels que :

$$|\beta| > 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta g^{(p)}(2x) = g^{(p)}(x)$$

   (e) En déduire que, dans tous les cas, g est polynomiale.

4. Dans cette question, on suppose que f est une fonction de classe C^∞ élément de E, de suite adaptée $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$, et que $\delta(f)$ n'est pas la fonction nulle.

   (a) Montrer que $\delta(f)$ est une fonction polynomiale non nulle; on note q son degré.

   (b) À l'aide de (2), montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\quad s_n = \dfrac{1}{n^q}$
   puis montrer qu'il existe un réel non nul a tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta(f)(x) = ax^q$.

   (c) Pour chaque entier naturel non nul p, montrer, en appliquant ce dernier résultat à la fonction polynomiale B_p introduite dans la partie **II**, qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta(B_p)(x) = px^{p-1}$$

   (d) Montrer qu'il existe un réel λ non nul et un entier p non nul tels que la fonction $\delta(f - \lambda B_p)$ soit nulle. Établir alors que la fonction $h = f - \lambda B_p$ est une fonction 1-périodique, de classe C^∞ et élément de E, et en préciser une suite adaptée.

Partie IV Étude des fonctions indéfiniment dérivables et 1-périodiques de E

1. Dans cette question préliminaire, on suppose que g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et 1-périodique, telle que, pour tout réel x, $g(nx)$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $g(k) = 0$.

   (b) Montrer que $g(\frac{1}{2}) = 0$. Plus généralement, montrer que, pour tout entier relatif p et tout entier naturel non nul q, on a l'égalité : $g(\frac{p}{q}) = 0$.

   (c) En déduire que g est la fonction nulle.

   Dans toute la suite de cette partie, on suppose que f est une fonction de classe C^∞ et 1-périodique, élément de E, de suite adaptée $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$.

2. (a) Montrer que l'application qui à tout réel x associe $\int\limits_x^{x+1} f(t)dt$ est constante.

   (b) Pour tout réel x, montrer que $\frac{s_n}{n} f(nx)$ tend vers $\int\limits_0^1 f(t)dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

3. On suppose dans cette question que $\frac{|s_n|}{n}$ tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

   Montrer, à l'aide de la question 1), que f est la fonction nulle.

4. Dans cette question, on suppose plus généralement qu'il existe un entier naturel k tel que $n^k |s_n|$ tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

   (a) Montrer, en considérant une dérivée d'ordre suffisant de f , que f est polynomiale.

   (b) Montrer que f est constante.

5. À l'aide du résultat final de la partie **III**, montrer que les fonctions de classe C^∞ appartenant à E et qui ne sont pas 1-périodiques sont exactement les fonctions polynomiales du type λB_p, obtenues lorsque p décrit $\mathbb{N}^\times$ et λ décrit $\mathbb{R}^\times$.