ESG 1983 Option générale Math II

h étant une fonction numérique de la variable réelle x, on désigne par $h^{(i)}$ la $i^{ième}$ dérivée de h.

I. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dqns $\mathbb{R}$ telle que : $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

(1) Calculer en fonction de n l'expression de $f^{(n)}$.

(2) Etudier les variations de la fonction $f^{(n)}$ sur l'intervalle de $\mathbb{R}$: $[0, 1[$.

(3) Soit la fonction F définie sur $]-1, 1[$ telle que

$$x \in]-1, 1[\mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Etudier et représenter graphiquement cette fonction.

II. $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $I = [-b, b]$ intervalle de $\mathbb{R}$
Soit g une fonction numérique définie sur I vérifiant les propriétés suivantes :

- g est impaire
- $\forall n \in \mathbb{N}$, g est n fois dérivable
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ est continue sur I.

(1) Etudier l'existence des solutions de l'équation

$$(2b)^{n+1} g^{(n+1)}(x) = g(b) \times (n+1)! - \sum_{i=0}^{n} (2b)^i g^{(i)}(-b) \prod_{k=i+1}^{n+1} k,$$

où x est l'inconnue appartenant à I et où $\prod\limits_{k=i+1}^{n+1} k = (i+1)(i+2)\cdots n \times (n+1)$.

(2) Démontrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \quad g^{(2p+1)}(0) = 0$.

III. (1) Déterminer la fonction polynôme p_{2n} de degré $2n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant i \leqslant 2n, \quad p_{2n}^{(i)}(0) = f^{(i)}(0),$$

f étant la fonction définie dans le I)

(2) En déduire $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{x^{2n+2}-1}{x^2-1} dx$

(3) On suppose que $|x| < 1$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{2n}(x)$ puis $\int\limits_0^{1/2} \left[\lim\limits_{n \to +\infty} p_{2n}(x) \right] dx$