ESG 1987 Option économique

Problème I :

I. Pour chaque nombre réel a, on considère la fonction f_a définie par :

$$f_a(x) = (x-a)^{a-x}$$

et on désigne par f_a le graphe de f_a.

1) a. Donner le domaine de définition de la fonction f_a noté D_a.
   b. Calculer les limites aux bornes de D_a suivant les valeurs de a.
   c. La fonction f_a peut-elle être prolongée par continuité aux bornes de D_a.
2) La fonction f_a est-elle dérivable ? si oui, calculer sa dérivée pour $x \in D_a$; puis pour $x = a$, suivant les valeurs de a. Dans le cas où f_a admet une dérivée, étudier son signe.
3) Etudier les variations de f_a et construire son graphe f_a suivant les valeurs de a dans chacun des cas suivants :

$$a < -1; \quad a = -1, \quad -1 < a < 0, \quad 0 < a < \frac{1}{e^2}, \quad a = \frac{1}{e^2}$$

II. On considère les applications $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dépendant toujours du paramètre a définies en posant $g_a(x) = ae^x + x^2 + 2x + 2$.

1) Etudier le comportement de g_a quand $x \to +\infty$.
   Démontrer qu'il existe une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} (g_a(x) - g(x)) = 0$ pour tout réel a.
2) Calculer $g'_a(x)$. Démontrer que $y = g_a(x)$ et $y' = g'_a(x)$ vérifient quel que soit a, une relation de la forme $F(x, y, y') = 0$ que l'on déterminera. En déduire l'ensemble des points de C_a où la tangente est parallèle à l'axe Ox.
3) Calculer $y'' = g''_a(x)$; en déduire l'ensemble des points d'inflexion de C_a.
4) Pour $a \neq a'$, étudier les positions relatives des graphes C_a et $C_{a'}$.

III. Dans cette partie, on étudie des fonctions d'une variable réelle qui prennent, selon le cas, des valeurs positives, ou strictement positives, avec $a \in \mathbb{R}$.

1) Soit h_a la fonction définie en posant pour tout réel x strictement positif $h_a(x) = x^a \exp(-\frac{1}{x})$.
   Démontrer que $h_a(x)$ a une limite quand $x \to 0^+$.
2) On suppose désormais que h_a a été prolongée par continuité en zéro et on définit k_a telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k_a(x) = \int_0^x t^a \exp(-\frac{1}{t}) dt.$$

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, la dérivée $n^{ième}$ de la fonction $h_a(x)$ est de la forme :

$$\forall x > 0, \quad h_a^{(n)}(x) = x^{a-2n} \exp(-\frac{1}{x}) P_{(a,n)}(x),$$

   où $P_{(a,n)}$ est un polynôme de degré inférieur à n.
   b. Calculer $P_{(a,n)}$ pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et écrire la relation permettant de calculer $P_{(a,n)}$ en fonction de $P_{(a,n-1)}$ et de sa dérivée.

c. Démontrer la relation $k_a(x) = x^{a+2}\exp(-\frac{1}{x}) - (a+2)k_{(a+1)}(x)$.

d. Démontrer qu'il existe une suite de nombres $(C_{a,i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$k_a(x) = x^{a+2}\exp(-\frac{1}{x})\sum_{i=0}^{p} C_{(a,i)}x^i + C_{(a,p+1)}k_{(a+p+1)}(x)$$

Pour tout entier naturel p, calculer les nombres $C_{(a,i)}$ pour $i \in \mathbb{N}$

Problème II

On notera $\mathbb{P}$ la probabilité d'un évènement.
Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ une suite d'évènements indépendants de même probabilité p avec $0 < p < 1$. On pose $q = 1-p$ et on désigne par X la variable aléatoire égale à l'indice du premier évènement qui se réalise ($X = 1$ si A_1 se réalise, $X = 2$ si A_1 ne se réalise pas et si A_2 se réalise, etc.).

1. Calculer $\mathbb{P}(X = k)$.
   Que vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$?

2. On pose $\varphi(u) = \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X = k)u^k$ une fonction polynômiale de variable u.

   (a) Calculer en fonction de p, q et u, $\varphi(u)$.

   (b) Prouver que $\varphi'(u) = \mathbb{E}(X)$ avec $\mathbb{E}$, espérance de X. Calculer alors $V(X)$ la variance de X.

3. Calculer, pour $n \geqslant 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = n + k/X > k)$.
   Que remarque-t-on ?

4. Calculer la probabilité conditionnelle pour $X = 2$, sachant que X est paire.

5. On désigne par Y la variable aléatoire égale à l'indice i pour lequel, pour la première fois $A_{i-1} \cap A_i$ se réalise.
   On pose alors $r_n = \mathbb{P}(Y = n)$.
   Calculer r_2, r_3, r_4, r_5 puis, plus généralement, exprimer pour $n > 3$, r_n à l'aide de $r_1, r_2, ..., r_{n-3}$. En déduire que $\sum_n r_n = 1$.