ESG 1988 Option économique

Problème I (suites et probabilités)

Deux joueurs A et B jouent à une suite de parties indépendantes. La probabilité de gagner une partie pour A (donc de perdre pour B) est $\dfrac{2}{3}$.

Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs a gagné deux parties de plus que l'autre. Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on désigne par q_n, r_n, s_n, t_n et u_n la probabilité des évènements suivants :
Q_n : "la $n^{ième}$ partie est jouée et A a gagné deux parties de plus que B à l'issue de cette $n^{ième}$ partie"
R_n : "la $n^{ième}$ partie est jouée et A a gagné une partie de plus que B à l'issue de cette $n^{ième}$ partie"
S_n : "la $n^{ième}$ partie est jouée et les deux joueurs ont gagné le même nombre de parties à l'issue de cette $n^{ième}$ partie"
T_n : "la $n^{ième}$ partie est jouée et B a gagné une partie de plus que A à l'issue de cette $n^{ième}$ partie"
U_n : "la $n^{ième}$ partie est jouée et B a gagné deux parties de plus que A à l'issue de cette $n^{ième}$ partie"

1. (a) Calculer les valeurs suivantes :
   $q_1, \quad q_2, \quad r_1, \quad r_2, \quad s_1, \quad s_2, \quad t_1, \quad t_2, \quad u_1, \quad u_2$
   (b) Pour $n \geqslant 3$, prouver que $r_n = \dfrac{2}{3} s_{n-1}$ et exprimer également s_n et t_n en fonction de r_{n-1}, s_{n-1} et t_{n-1}.
   (c) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $\quad s_n, t_n, r_n$ en fonction de n.
2. Pour $n \geqslant 2$, déterminer q_n et u_n en fonction de r_{n-1} et t_{n-1}.
3. Déterminer la probabilité pour que le jeu s'arrête à l'issue de la $n^{ième}$ partie ($n \geqslant 2$).
4. Quelle est la probabilités que A gagne le jeu ? (toute réponse non justifiés ne sera pas comptabilisée).

Problème II (algèbre)

Partie I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
On appelle u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même (endomorphisme de $\mathbb{R}^3$) dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A.

1. Soient λ et μ des nombres réels et $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ les trois éléments de $\mathbb{R}^3$ définis par
$$\overrightarrow{f_1} = (1+\mu, 0, 0) \quad \overrightarrow{f_2} = (5, -2\lambda, 2) \quad \overrightarrow{f_3} = (-1, \lambda, 2)$$
   Pour quelle valeur de λ et μ ces trois éléments forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Dans les autres cas, quel est le rang du système qu'ils engendrent ?
2. On note B la base formée par $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ lorsque $\lambda = 1$, $\mu = 0$.
   Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B; calculer P^{-1}.
3. Quelle est la matrice A' de u lorsque $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base B. Pour tout entier $n \geqslant 1$, écrire $(A')^n$.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a l'égalité suivante : $(A')^n = P^{-1} A^n P$.
   En déduire la matrice A^4.

Partie II

A) On définit une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\quad \overrightarrow{v} \to f(\overrightarrow{v})$ par la donnée des coordonnées X, Y, Z du vecteur $\overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{v})$ en fonction des coordonnées (x, y, z) du vecteur $\overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned} X = &\quad (1-m)x + (2m+1)y + (2m+2)z \\ Y = &\quad mx + my \\ Z = &\quad 2x + (m+1)y + (m-1)z \end{aligned}$$

Montrer que le rang de f est 3, sauf pour les valeurs particulières de m, qu'on déterminera. Pour ces valeurs particulières, précisez la valeur du rang de f et définir le sous-espace $f(\mathbb{R}^3)$ en déterminant les relations liant X, Y, Z coordonnées d'un vecteur de $f(\mathbb{R}^3)$.

B) Soit le vecteur $\overrightarrow{w_0} = (x_0, y_0, z_0) = (m, 2m+2, m^2 - 2m + 9)$ de $\mathbb{R}^3$, résoudre, en discutant suivant les valeurs du paramètre m, l'équation $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w_0}$ (c'est-à-dire $f(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$)

Partie III

1. Soit u l'application linéaire sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie dans les bases canoniques sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ par la matrice
$$\begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) On note $\mathrm{Im}(u)$, l'image de u. Trouver la dimension sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{Im}(u)$. Trouver une base de $\mathrm{Im}(u)$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Trouver la dimension du noyau de u.

   (c) Trouver une base du noyau de u.

2. Soient a, b, c, m des paramètres réels et soit v l'application linéaire sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie dans les bases canoniques sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ par la matrice
$$\begin{pmatrix} -11 + ma - b + c & 7 - ma - c & 0 & 3 - ma - b - c \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer les déterminants des matrices d'ordre 3 extraites de cette matrice.

   (b) Déterminer la dimension sur $\mathbb{R}$ de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(v)$ pour les différentes valeurs des paramètres a, b, c, m. Trouver une base de $\mathrm{Im}(v)$ sur $\mathbb{R}$ pour les différentes valeurs des paramètres a, b, c, m.

Problème III (calcul intégral et récurrence)

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2} dx$.

1. Quelle est la signification géométrique de I_0 ? En déduire la valeur de I_0 et calculer I_1.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, on a $I_n = \dfrac{n-1}{n+2} I_{n-2}$
3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n (on distinguera selon la parité de n).
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante et que cette limite converge vers zéro.
5. Montrer que $n(n+2)(n+1)I_n I_{n-1}$ est indépendante de n et calculer sa limite. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.

6. On considère maintenant une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeur dans $\mathbb{R}_+$, continue, décroissante et telle que l'intégrale impropre $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

   Montrer que $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ avec $u_i = \frac{1}{i}\int\limits_i^{i+1} xf(x)dx$ est convergente et majorer cette somme.

Partie II

A) On pose maintenant $I(a,b) = \int\limits_a^b \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}dx$.

1. Montrer que $I(a,b) = I(-b,-a)$.
2. Prouver la relation : $I(a,b) = I(\frac{1}{a},\frac{1}{b})$ pour a et b tels que l'on ait $ab > 0$.
3. Etablir la relation $I(a,\frac{1}{a}) = 0$ pour $a > 0$.

B) Soit $F(p,q) = \int\limits_0^1 x^p(1-x)^q dx$ où p et q sont deux entiers positifs.

1. Etablir la relation $F(p,q) = \frac{q}{p+1}F(p+1,q-1)$.
2. En déduire que $F(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$