ESG 1988 Option générale Math II

(Toutes les probabilités calculées dans ce problème seront données sous forme de fractions irréductibles).
Une société organise tous les jours le jeu suivant :
Il s'agit pour un joueur de choisir une carte à piques parmi les huit cartes à piques qui sont : l'as, le roi, la dame, le valet, le dix, le neuf, le huit, le sept.
Une carte à coeur parmi les huit cartes à coeurs qui sont : l'as, le roi, la dame, le valet, le dix, le neuf, le huit, le sept.
Une carte à carreau parmi les huit cartes à carreaux qui sont : l'as, le roi, la dame, le valet, le dix, le neuf, le huit, le sept.
Une carte à trèfle parmi les huit cartes à trèfles qui sont : l'as, le roi, la dame, le valet, le dix, le neuf, le huit, le sept.
On appellera jeu du joueur, les 4 cartes qu'il a choisi.
Pour joueur à ce jeu, le joueur paie à la société 10 Francs, ces dix francs sont appelés mise du joueur.
A la fin de la journée, la société effectue un tirage en choisissant de manière équiprobable une carte parmi les huit cartes à piques mentionnées ci-dessus, une carte à coeur parmi les huit cartes à coeurs mentionnées ci-dessus, une carte à carreau parmi les huit cartes à carreaux mentionnées ci-dessus, une carte à trèfle coeur parmi les huit cartes à trèfles mentionnées ci-dessus.
Si un joueur a dans son jeu exactement 2 des 4 cartes du tirage, la société paie à ce joueur deux fois sa mise.
Si un joueur a dans son jeu exactement 3 des 4 cartes du tirage, la société paie à ce joueur 30 fois sa mise.
Si un joueur a dans son jeu les 4 cartes du tirage, la société paie à ce joueur 1 000 fois sa mise.
Dans tous les autres cas, la société ne paie rien du tout au joueur et celui-ci perd évidemment sa mise.

Partie A

1. Un joueur joue à ce jeu un jour, on désigne par X_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique de ce joueur après résultat du tirage.
   Déterminer la loi de probabilité de X_1, calculer l'espérance mathématique de X_1 et la variance de X_1.

2. Un joueur joue à ce jeu deux jours de suite. Soit X_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique de ce joueur après résultat des deux tirages.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_2.

   (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable $X_2 - X_1$
   (X_1 étant le gain algébrique du joueur après résultat du premier tirage)

   (c) Calculer l'espérance mathématique de X_2 et la variance de X_2.

3. Soit n un entier naturel $n \geqslant 2$, un joueur joue n jours de suite à ce jeu. Pour i entier naturel, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, on désigne par X_i le gain algébrique du joueur après résultats des i premiers tirages.

   (a) i étant un entier naturel avec $2 \leqslant i \leqslant n$, déterminer la loi de $X_i - X_{i-1}$.

   (b) Déterminer en fonction de n l'espérance mathématique de X_n et la variance de X_n.

   (c) On suppose $n \geqslant 3$. Calculer les probabilités des évènements $X_3 < 0, \quad X_3 > 10$.

Partie B

Soit λ un entier naturel non nul.
On suppose que le nombre de joueurs participant à ce jeu un jour donné est une variable aléatoire Y prenant ses

valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi de probabilité de Y vérifie les relations suivantes :

$$P(Y=0)=e^{-\lambda} \text{ et pour tout entier } k \text{ non nul } P(Y=k)=\frac{\lambda}{k}P(Y=k-1)$$

$P(Y=k)$ désigne la probabilité de l'évènement $Y=k$.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer l'espérance mathématique de Y.
2. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = P(Y=k)$.
   Déterminer le plus grand terme de cette suite.
3. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs a qui la société paie à chacun 20 francs.
   Pour k entier naturel, déterminer la loi de probabilité de Z sachant que $Y=k$
4. Déterminer la loi conjointe du couple (Y,Z).
5. Déterminer la loi de probabilité de Z et calculer l'espérance mathématique de Z.