ESG 1989 Option générale Math I

Exercice d'algèbre

Soit A une matrice carrée d'ordre 2, notée $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k = \begin{pmatrix} x_n & z_n \\ y_n & t_n \end{pmatrix}$$

et par définition, on dira que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si les quatre suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ et (t_n) sont convergentes. On pose alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = X, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = Y, \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = Z, \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = T$$

et on définit la limite de S_n par $\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{pmatrix} X & Z \\ Y & T \end{pmatrix} = e^A$ (exponentielle de A)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier l'existence de e^A et e^B et les calculer.
   (b) Calculer $e^A e^B$
   (c) Soit $C = A + B$. Justifier l'existence de e^C et la calculer en fonction de $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et de C.
   Quelle conclusion en tirez vous ?
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Diagonaliser M. On donnera P et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ telles que $M = PDP^{-1}$.
   (b) Montrer que $e^D = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire e^M

Problème d'analyse

On notera $E = C_0([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et E' l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,1]$.
Pour tout $f \in E$, on pose $\Phi(f) = F$, où F est définie sur $[0,1]$ par :

$$F(t) = \int_0^t e^{-tx} f(x)dx.$$

1. Soit Φ l'application de E dans E' qui à f associe F. Montrer que Φ est linéaire.
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. On note $F^* = \Phi(f')$ où f' désigne la dérivée de f.

(a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $\quad F^*(t) = tF(t) + e^{-t^2} f(t) - f(0)$

(b) En déduire l'expression de $F(t)$ en fonction de $F^*(t)$ pour tout $t \neq 0$.

3. Soit ω la fonction nulle sur $[0,1]$ et f_0 la fonction définie par $f_0(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$.

   (a) Calculer $\Phi(\omega)$ et en déduire $F_0 = \Phi(f_0)$.

   (b) Etudier les variations de F_0 et tracer son graphe (on précisera les demi-tangentes en 0 et 1).

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(t) = t^n \text{ pour } n \geqslant 1 \text{ et } f_0(t) = 1.$$

   On note $F_n = \Phi(f_n)$.

   (a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $F_n(t) = \dfrac{nF_{n-1}(t) - t^n e^{-t^2}}{t}$.

   (b) Calculer F_1 et F_2.

   (c) Montrer qu'il existe un polynôme P_n, dont on précisera le degré, tel que :

$$F_n(t) = \frac{n! + e^{-t^2} P_n(t)}{t^{n+1}}$$

5. Soit $f(x) = e^{\alpha x}$ sur $[0,1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculer $F(t)$ pour $t \neq \alpha$ puis pour $t = \alpha$ dans le cas où $\alpha \in [0,1]$.

   (b) Etudier la continuité de F en α dans le cas où $\alpha \in [0,1]$.

6. Pour $f \in E$, on pose $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

   (a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et $t' \in [0,1]$:

$$\left|F(t) - F(t')\right| \leqslant \left|\int_0^{t'} (e^{-tx} - e^{-t'x}) f(x)dx\right| + \left|\int_t^{t'} e^{-tx} f(x)dx\right|$$

   (b) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et $t' \in [0,1]$:

$$\left|F(t) - F(t')\right| \leqslant 2M \left|t - t'\right|.$$

   (c) En déduire que $F \in E$ et que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

7. On considère l'application $\Psi : E \to E'$ qui à f associe G définie sur $[0,1]$ par :

$$G(t) = \int_0^t f(x)dx.$$

   (a) Justifier, rapidement, que $G \in E$ et $\Psi \in \mathcal{L}(E)$

   (b) Déterminer $\Psi(f_0)$ puis $\Phi \circ \Psi(f_0)$ pour f_0 définie à la question 3.

   (c) Calculer $K(t,s) = \int_s^t e^{-tu} du$.

   (d) Calculer $H(t) = \int_0^t K(t,s) f_0(s) ds$

   (e) Vérifier que $H = \Phi \circ \Psi(f_0)$

Probabilités

Les objets produits par une usine sont numérotés $1, 2, ..., n, ...$ dans l'ordre de production, $n \in \mathbb{N}^{\times}$.
Certains de ces objets sont défectueux. On pose $X_n = 1$ ou 0 selon que le $n^{ième}$ objet est défectueux ou non et

$$P(X_n = 1) = p \text{ avec } 0 < p < 1 \text{ et } n \in \mathbb{N}^{\times}.$$

Certains objets sont controlés. On pose $Y_n = 1$ ou 0 selon que le $n^{ième}$ objet est contrôlé ou non et

$$P(Y_n = 1) = q \text{ avec } 0 < q < 1 \text{ et } n \in \mathbb{N}^{\times}.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ de même loi de Bernouilli, de paramètre p, sont indépendantes entre elles.
Les variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ de même loi de Bernouilli, de paramètre q, sont indépendantes entre elles et les X_n sont indépendantes de Y_n.
On pose $Z_n = X_n Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

1. (a) Quelle est la loi de probabilité de Z_n ?
   (b) Montrer que les Z_n sont indépendantes entre elles.

2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   S_n représente le nombre d'objets défectueux parmi les n premiers objets produits et T_n le nombre d'objets controlés parmi les n premiers produits.
   Quelles sont les lois de S_n et T_n ?

3. (a) Soit R la variable égale au rang du premier objet défectueux et controlé.
   Quelle est la loi de R ?
   (b) Montrer que
   $$P(X_i = 1/R = n+1) = \frac{p(1-q)}{1-pq}$$
   (c) On note U la variable aléatoire égale au nombre d'objets défectueux non décelés par le controle, avec que n'apparaisse le premier objet défectué-controlé.
   Quelle est la loi de U sachant $(R = n+1)$?

4. (a) Calculer $E(U/(R = n+1))$, espérance de la variable aléatoire U sachant $(R = n+1)$.
   (b) En déduire la valeur de $E(U)$.
   On pourra utiliser sans démonstration l'égalité :
   $$E(U) = \sum_{n=0}^{+\infty} E\left[U/(R = n+1)\right] P(R = n+1)$$
   (c) Application numérique : $p = 0,2$, $q = 0,1$. Calculer $E(U/(R = n+1)$ et $E(U)$