ESG 1989 Option générale

Les parties I et II et III du problème sont indépendantes.

b, r, j, n sont des entiers naturels non nuls.
$s = b + r + j$ et $n < b + r + j$

Une urne contient b boules blanches, r boules rouges et j boules jaunes. Les boules blanches sont numérotées de 1 à b. Toutes les boules rouges portent le numéro 0 de même que toutes les boules jaunes.

I. On tire de cette urne simultanément n boules (on suppose l'équiprobabilité des tirages) et on désigne par Y la variable aléatoire égale à la somme des numéros portés par les boules tirées.

(1) Déterminer la loi de probabilité de Y; l'espérance mathématique et la variance de Y lorsque :

$$b = j, \qquad r = 1, \qquad j = 4 \qquad \text{et} \qquad n = 3$$

(2) On définit pour tout entier i naturel tel que $1 \leqslant i \leqslant b$ la variable aléatoire X_i égale à i si la boule portant le numéro i est dans le tirage des n boules et qui prend la valeur 0 sinon.

Soient i et k deux entiers tels que :

$$i \neq k \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant i \leqslant b; \qquad 1 \leqslant k \leqslant b$$

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X_i, X_k).
On présentera la loi de probabilité par un tableau à double entrée où les probabilités seront exprimées en fonction de s et de n.

b. Déterminer la covariance du couple (X_i, X_k) uniquement exprimée en fonction de i, k, n et s.

c. Les variables X_i et X_k sont-elles indépendantes ?

d. Soit la variable $U = \sum\limits_{i=1}^{b} X_i$.
Déterminer l'espérance mathématique et la variance de U. Ces deux nombres seront exprimés uniquement en fonction de n, b et s.

e. Calculer l'espérance mathématique et la variance de U dans le cas où

$$b = 3, \qquad r = 1, \qquad j = 4, \qquad n = 3$$

f. Que peut-on dire des variables U et Y.

II. On tire maintenant une à une avec remise des boules de l'urne (on suppose l'équiprobabilité des tirages) et on arrête les tirages dès que l'on a obtenu pour la première fois une boule blanche.

Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.

(1) Déterminer la loi de probabilité de Z et calculer son espérance mathématique et sa variance.

(2) On définit la variable aléatoire X égale au nombre de boules rouges obtenues pendant l'expérience c'est-à-dire jusqu'à l'obtention de la première boule blanche.

Soit k un entier naturel non nul et i un entier naturel.

a. Calculer la probabilité de l'évènement $X = i$ sachant que $Z = k$.

b. On suppose que $b = 2$, $r = 2j$. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance et la variance de X.

III. On suppose dans cette partie $b = 2$, $r = 4$ et $j = 4$.

On tire de cette urne successivement et avec remise deux boules de cette urne. On suppose l'équiprobabilité des tirages.

Soit T la variable aléatoire égale à la somme des numéros portés par les deux boules tirées.

(1) Déterminer la loi de probabilité de T et calculer l'espérance et la variance de T.

(2) On appelle expérience le tirage successif et avec remise de deux boules de cette urne.

On répète m fois de suite cette expérience (l'urne ayant toujours 2 boules blanches, 4 boules rouges et 4 boules jaunes avant et après chaque expérience)

Soit A l'évènement " la somme des numéros obtenus lors d'une expérience est égale à 3 "

Soit Z_m la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de l'évènement A lors des m expériences.

Soit V_m la probabilité de l'évènement $\dfrac{1}{100} \leqslant Z_m \leqslant \dfrac{3}{100}$.

a. Calculer l'espérance et la variance de Z_m.

b. Déterminer une suite $(W_m)_{m\in\mathbb{N}^\times}$ telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^\times, \qquad W_m \leqslant V_m \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to+\infty} W_n = 1$$