ESG 1989 Option économique et technologique

EXERCICE N° I

1. Dire pourquoi les limites $\int_{-A}^{B} x^k e^{-x^2} dx$ existent pour $k > 0$ fixé, quand A et B tendent vers $+\infty$.

   On notera $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx$ cette limite.

2. Montrer que la dérivée $\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$ est de la forme $(-1)^n H_n(t) e^{-t^2}$ où H_n est un polynôme de degré n, montrer que $H_0 = 1$ et $H_1(t) = 2t$ et
$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H_n'(t) \qquad (1)$$
   Montrer que H_n est pair ou impair suivant n.

3. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) e^{-t^2} t^k dt = 0$ dès que $k < n$ et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) e^{-t^2} t^n dt$ à l'aide $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

   (On pourra intégrer par parties). En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) e^{-t^2} H_q(t) dt = 0$ dès que $p \neq q$.

4. Montrer que $\{H_0, H_1, ..., H_n\}$ forment, pour tout n, une base de l'espace des polynômes (à coefficients réels) définis sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n (utiliser degré $(H_i) = i$)

5. Rappeler pourquoi si f est continue, supérieur ou égal à 0 et $\int_a^b f(t) dt = 0$ alors $f = 0$ sur $[a, b]$.

6. Montrer que si P est un polynôme de degré $(n+1)$ tel que l'on ait $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} t^k dt = 0$ pour tout $k \leqslant n$ alors $P = \lambda H_{n+1}$

   (On pourra calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (P - \lambda H_{n+1})^2(t) dt$ pour un λ bien choisi).

7. Montrer que, si λ_n est choisi de sorte que $H_n - \lambda_n t H_{n-1}$ soit de degré $(n-1)$ alors il existe μ_n et γ_n tel que l'on ait :
$$(H_n - \lambda_n t H_{n-1}) - \mu_n H_{n-1} = \gamma_n H_{n-2} \qquad (2)$$

EXERCICE N° II (Matrices dites magiques)

Soit $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients $a_{i,j}$ réels. Si quels que soient i et j, $a_{i,j} = -a_{j,i}$ la matrice est dite antisymétrique et si les sommes

$$a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3}, \qquad a_{1,j} + a_{2,j} + a_{3,j}, \qquad a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}, \qquad a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3}$$

sont égales, la matrice est dite magique.

1. Montrer qu'une matrice M quelconque est la somme d'une matrice symétrique M' et d'une matrice antisymétrique M'' et que cette décomposition est unique.

2. Montrer que la somme de deux matrices magiquess, que la transposée d'une matrice magique, que le produit d'une matrice magique par un scalaire sont des matrices magiques.

Montrer que si M est magique, M' et M'' le sont aussi.
Vérifier que les matrices A, B, C telles que :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont des matrices magiques.

3. Construire toutes les matrices magiques antisymétriques.
4. Construire toutes les matrices magiques en commençant par étudier le cas où $a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 0$
5. Construire toutes les matrices magiques. Montrer qu'elles forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension. Trouver une base.
6. Calculer A^2, B^2, C^2, AC, BC, CA, CB. Montrer que $AB + BA$ est une combinaison linéaire de C et I.
7. Quelle condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices magiques soit magique ? En déduire toutes les magiques produit de deux matrices magiques.
8. Montrer que le produit d'une matrice magique par une combinaison linéaire de C et I est magique.

EXERCICE N° III (Probabilités)

Un marathon jeu d'hivers consiste à exécuter les épreuves suivantes :

1. Traversée d'un glacier de largeur 1 km.
2. Faire un slalom de 20 portes.
3. Emprunter à nouveau la même perche du téléski ayant monté le candidat au départ de l'épreuve.

I. Un candidat débute les épreuves par la traversée du glacier. A l'endroit où il devra traverser, on sait qu'il y a une probabilité p qu'il existe une crevasse. On suppose que si cette crevasse existe, sa position est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$, (la crevasse fait toute la largeur du glacier), du trajet. Le skieur a déjà parcouru la distance x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, sans encombre et il se demande alors qu'elle est la probabilité qu'il rencontre cette crevasse.

   (a) Faire le calcul littéral.
   (b) Application numérique : $p = 0,036$ et $x = 140$ m

II. Notre skieur arrive à l'épreuve de slalom à 20 portes, et s'il ne tombe pas, son temps de parcours suit une loi normale de moyenne 50 secondes et d'écart-type 2 secondes. A chaque porte, il peut tomber avec une probabilité de $\dfrac{1}{20}$, ce qui lui fait perdre 4 secondes sur son temps de parcours. On admet que les chutes éventuelles sont indépendantes les unes des autres.
Quelle est la probabilité de décrocher la flèche de platine ? (Temps inférieur à 52 secondes)

III. Lors de sa première utilisation du téléski, le skieur a emprunté l'une des N perches de cet appareil. Entre cet instant et l'utilisation suivante, le nombre de skieurs qui se présentent est une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre p.

   1) Quelle est la probabilité que le skieur reprenne la même perche ?
   2) Calcul numérique avec $N = 500$ et $p = \dfrac{1}{36}$

Insérer table de loi binomiale ($p = 0,05$ à $0,50$ avec un pas de $0,05$)
table de loi normale (répartition et grandes valeurs)
loi de poisson (λ de $0,1$ à 4 avec un pas de $0,1$ et $k \in [\![0, 12]\!]$ puis $\lambda \in [\![5, 10]\!]$ et k jusqu'à 24