ESG 1990 Option économique

Exercice I

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Etudier et représenter graphiquement cette fonction. En déduire que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 1 + x < e^x$$

2. Soit q un nombre réel strictement positif et soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad U_n = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + q^i)$$

(ln désigne le logarithme népérien).

   (a) En utilisant l'inégalité du 1), montrer que si $0 < q < 1$, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est majorée.

   (b) Discuter suivant les valeurs de q la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$

3. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad V_n = \frac{x}{e^x - 1} - \sum_{k=1}^{n} x e^{-kx}$$

où x est un nombre strictement positif.
Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$

Exercice II

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1. On considère l'application t de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto t(x, y) = (x, 2x + 2y)$$

Soit T la matrice de t dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Déterminer les nombres réels λ_1 et λ_2 vérifiant la propriété suivante

Il existe $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{v} \neq (0, 0)$ tel que $t(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 \overrightarrow{v}$
Il existe $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{w} \neq (0, 0)$ tel que $t(\overrightarrow{w}) = \lambda_1 \overrightarrow{w}$

   (b) Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{v} \neq (0, 0)$ tel que $t(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 \overrightarrow{v}$
   Soit $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{w} \neq (0, 0)$ tel que $t(\overrightarrow{w}) = \lambda_1 \overrightarrow{w}$
   Montrer que $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice T' de t dans cette base.

   (c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $P^{-1}TP$.
   En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad T^n$.

2. Soit f l'application de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \mapsto f(M) = TM - MT$$

   (a) Montrer que f est linéaire.

   (b) Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer une base de $\mathcal{A}$.

Exercice III

Un commerçant receptionne un lot de N articles. Sur ces N articles, n d'entre eux sont défectueux.
On suppose $N - n \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$.
Le commerçant contrôle les articles du lot en les tirant au hasard un à un et sans remise.
Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier article défectueux contrôlé.
Soit Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition du deuxième article défectueux contrôlé.

1. On suppose $n = 1$
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

2. On suppose $n = 2$ et $N = 6$.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   (c) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). On présentera cette loi par un tableau à double entrée.
   (d) Calculer la covariance du couple (X, Y).

3. Pour N et n quelconques

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de Y.

4. Pour N quelconque et $n = 2$, déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y).

5. On suppose $N = 9$ et $n = 2$.
   Le commerçant refuse le lot dans les deux cas suivants : $(X \leqslant 4)$ ou $(X > 4$ et $Y \leqslant 7)$.
   Calculer la probabilité pour que le commerçant refuse le lot.