ESG 2002 Option générale Math I

Exercice d'algèbre

On désigne par E l'ensemble des matrices de la forme

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\frac{\lambda^2}{2} & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \frac{\lambda^2}{2} & 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

où λ est un nombre réel.

1. Démontrer que toute matrice de E s'écrit de manière unique sous la forme $I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} C$, où I désigne la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et B, C deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, indépendantes de λ.
2. Calculer BC, CB, B^2, C^2, B^3, C^3.
3. Soit $f : \begin{array}{c} (\mathbb{R}, +) \to (E, .) \\ \lambda \mapsto A_\lambda \end{array}$.
   Montrer que f est un homomorphisme.
4. En déduire que $(E, .)$ est un groupe abélien.
5. Calculer $(A_\lambda)^n$ en fonction de $(A_\lambda)^2$, A_λ, n et I.

Exercice de probabilités

La durée du processus d'atterrissage d'un avion est le temps T, mesuré en minutes, qui s'écoule depuis la prise en charge par la tour de contrôle jusqu'à l'immobilisation de l'avion sur la piste. Dans un certain aéroport, on estime que T est une variable aléatoire réelle continue dont la densité de probabilité est la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(t) = te^{-t} & \text{si } t > 0 \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer l'espérance et l'écart-type de T.
2. Déterminer la fonction de répartition F de T.
3. Quelle est la probabilité que :
   (a) T dépasse trois minutes
   (b) T soit compris entre 1 minute et 3 minutes 30 secondes.
   (c) T soit inférieur à 4 minutes 30 secondes sachant qu'il dépasse 3 minutes.
4. On suppose que n avions atterrissent successivement dans cet aéroport et que les durées d'atterrissage de chacun d'entre eux suivent la loi T et soient deux à deux indépendantes.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'avions dont le temps d'atterrissage est supérieur à 3 minutes.
   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice d'analyse

Dans ce problème, x désigne un réel strictement positif.

1. (a) Prouver la convergence des intégrales
$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2} \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2(1+t)}$$
   (b) Trouver 6 constantes réelles a, b, c, d, e, f telles que
$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{(1+t)^2} \qquad \frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{d}{t} + \frac{e}{t^2} + \frac{f}{t+1}$$
   pour tout t élément de $\mathbb{R}^\times \backslash \{-1\}$.
   (c) On pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2}$ et $G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2(1+t)}$.
   Calculer $F(x)$ et $G(x)$.

2. (a) Donner un équivalent des fonctions F et G en $+\infty$.
   On pourra poser $u = \frac{1}{x}$ et faire un développement limité en 0 de $f(x) = F(\frac{1}{u})$ et $g(x) = G(\frac{1}{u})$.
   (b) En déduire la convergence des intégrales
$$\int_1^{+\infty} F(x)dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} G(x)dx$$
   et donner leurs valeurs éventuelles.

3. Démontrer que pour $x > 0$: $\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{1+x}$

4. En raisonnement par récurrence sur n, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$
   En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\times$
$$1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{n!}{n^n} e^n < (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)e$$

5. On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad S_n = \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$$
   (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge (on pourra être amené à étudier la fonction h définie par $h(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1/2}$ pour $x \geqslant 1$)
   (b) Pour $n \geqslant 1$, trouver une relation entre I_{n+1} et I_{n-1}, en déduire la valeur de I_n pour n pair puis n impair.
   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.
   (d) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{(S_n)^2}{S_{2n}}$
   (e) En déduire des calculs précédents la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ et un équivalent de $n!$ pour les grandes valeurs de n.