ESG 1991 Option technologique

Exercice I

Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes

$$\forall t \in]-\infty, 0[, \quad f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad f(t) \geqslant 0$$
$$f \text{ continue sur }]-\infty, 0[\text{ et } f \text{ continue sur } [0, +\infty[\text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

1. Soit λ un réel strictement positif et soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle aue .

$$\forall t \in]-\infty, 0[, \quad f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

   (a) Montrer que f appartient à E.

   (b) Etudier les variations de f.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < \lambda$.
   Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]-\infty, 0[, \quad g(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

   Soit $t_1 > 0$ et $f(t_1) = g(t_1)$ et soit $t_2 > t_1$.
   Comparer les nombres $\int_0^{t_2} f(t)dt$ et $\int_0^{t_2} g(t)dt$ puis $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ et $\int_{t_1}^{t_2} g(t)dt$.

3. Représenter dans un même repère les graphes des fonctions f et g lorsque $\lambda = 2e$ et $\alpha = e$

Exercice II

A) Soit λ un réel, $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par

$$\forall t \in]-\infty, 0[, \quad f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Déterminer la fonction de répartition de X.
Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
Rappel : Une telle variable réelle aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ

B) Une firme vend des appareils électriques. On admet que la durée de bon fonctionnement de chacun de ces appareils exprimée en mois est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que chacun de ces appareils a une probabilité $p = 0,02$ de tomber en panne pendant les six premiers mois de son utilisation.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi de X; on donne logarithme népérien de $0,98 = -0,02$
2. Calculer la probabilité de l'évènement $X \geqslant 8$ sachant $X \geqslant 2$.
3. Cette firme a vendu N appareils. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui tombent en panne pendant les six premiers mois de leur utilisation, déterminer la loi de probabilité de Y et calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.
4. On suppose $N = 100$. En utilisant une approximation de Y par une loi de Poisson, calculer la probabilité de l'évènement $(Y = 4)$ puis de $(Y > 4)$.

5. La firme envisage de vendre ces appareils avec une garantie de six mois et pour cela majore de 20 F le prix de chaque appareil. En revanche, elle assume durant cette période de garantie, les réparations (toujours de même nature) qui lui coûtent 500 F par réparation.
   La majoration du prix de vente par appareil suffit-elle à couvrir avec une probabilité supérieure ou égale à 0,90 les frais de réparations entrainés par cette politique de vente dans le cas où
   (a) $N = 100$?
   (b) $N = 200$?
   On donne $\sum_{k=0}^{7} e^{-4} \dfrac{4^k}{k!} = 0,9489$

Exercice III

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels

I. Soit $A \in \mathcal{M}$, on pose $A = (a_{i,j})$
$a_{i,j}$ désigne le terme de la matrice situé à la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne.
Soit f l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}, \quad f : A = (a_{i,j}) \mapsto f(A) = \sum_{i=1}^{2} a_{i,i}$$

1) Montrer que f est linéaire et que $\forall A \in \mathcal{M}, \quad \forall B \in \mathcal{M}, \quad f(AB) = f(BA)$.
2) Soit $E = \{A \in \mathcal{M} \text{ telles que } f(A) = 0\}$.
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.
3) Déterminer 3 matrices J, K, L appartenant à $\mathcal{M}$ telles que (J, K, L) constituent une base de E.
4) Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}$ semblables alors $f(A) = f(B)$.

II. Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 1-a & 1-c \end{pmatrix} \text{ avec } 0 < a < 1 \text{ et } 0 < c < 1$$

Soit $A \in F$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1-a & 1-c \end{pmatrix}$ et soit $P = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$.

1) Calculer $P^{-1}AP$.
2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad A^n \in F$.
3) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & w_n \\ v_n & z_n \end{pmatrix}$.
   a. Déterminer les limites des suites (u_n), (v_n), (w_n), (z_n).
   b. Soient u, v, w, z les limites respectives de ces quatre suites.
   Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} u & w \\ v & z \end{pmatrix}$ est un élément de F