ESG 1994 Option générale Math II

Exercice 1

Soit k un entier ($k > 0$) et soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad U_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n+1}\right)^k$$

1. Déterminer la limite de cette suite pour : $k = 1$ puis $k = 2$ puis $k = 3$.
2. Pour k quelconque, déterminer la limite de la suite.

Exercice 2

Soit n un entier naturel ($n > 1$). On considère E_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Soit M une matrice de E_n vérifiant les propriétés suivantes

$$M^2 + M = 6I \text{ et } \forall k \in \mathbb{R}, \quad M \neq kI$$

I étant la matrice élément neutre de E_n muni de la multiplication des matrices.

1. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel E'_n de E_n engendré par les matrices M et I.
2. Soit F le sous-ensemble de E'_n formé des matrices N telles que $N^2 = N$.
   (a) Déterminer les éléments de F.
   (b) Démontrer que $\forall N \in F$ et $\forall N' \in F$ le produit NN' appartient à F.
   (c) Quelles sont les matrices de F qui sont inversibles ?
3. Soit $A \in E_{n+1}$, on pose $A = (a_{i,j})$.
   On suppose que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que

$$1 \leqslant i \leqslant n+1 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1 \quad a_{i,j} = \frac{1}{2^n}C_n^{i-1} \quad \text{où } C_n^{i-1} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!}$$

   (a) Calculer A^2.
   (b) Démontrer que A n'est pas inversible.
   (c) Déterminer les valeurs propres de A.
   On admettra qu'il existe deux valeurs propres distinctes.

Exercice 3

Un marchand de téléviseurs reçoit $2n$ téléviseurs ($n > 1$), n téléviseurs couleurs et n téléviseurs noirs et blancs.
Il les contrôle un à un en les choisissant au hasard et sans remise. On suppose l'équiprobabilité des choix.
Soit X_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition du dernier téléviseur couleur contrôlé

1. $n = 2$
   Déterminer la loi de probabilité de X_2 et calculer l'espérance mathématique de X_2 et la variance de X_2.

2. n étant quelconque
   Déterminer la loi de probabilité de X_n et calculer l'espérance mathématique de X_n et la variance de X_n.

3. Chaque téléviseur couleur a une probabilité p_1 d'être défectueux. Chaque téléviseur noir et blanc a une probabilité $1 - p_1$ d'être défectueux.
   On suppose que $0 < p_1 < 1$.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de téléviseurs couleurs défectueux.
   Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de téléviseurs noirs et blancs défectueux.
   Les variables Y et Z sont indépendantes.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de $Y + Z$.

   (b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de $Y + Z$.

   (c) On suppose $n = 2$ et $p_1 = \dfrac{1}{4}$.
   Calculer pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 4$ la probabilité de l'évènement $Y + Z = k$