ESG 2004 Option technologique

EXERCICE 1 : Puissances d'une matrice (3,5 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Le but de l'exercice est de calculer les puissances A^n de A où n est un entier supérieur ou égal à 1.

1. Calculer J^2, J^3; en déduire J^k pour tout entier k de $\mathbb{N}^\times$.
2. Déterminer deux nombres réels x et y tels que $A = xI + yJ$.
3. Donner, à l'aide de la formule du binôme de Newton, le développement de $(I + J)^n$.
4. En déduire que $A^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}J^2$ et exprimer A^n sous forme de tableau de nombres, pour n entier supérieur ou égal à 1.
5. Pourquoi la matrice A est-elle inversible ? calculer son inverse à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. L'expression obtenue à la question 4) pour n entier supérieur ou égal à 1 peut-elle s'étendre au cas où $n = -1$?

EXERCICE 2 : Etude de fonction(6,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 6\ln x$.

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ et préciser la ou les branches infinies.
2. Montrer que la dérivée de f sur $]0; +\infty[$ est du signe de $(x-2)(x+3)$. En déduire le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Tracer T et l'allure de C dans un repère orthonormé (1 unité = 2 cm). On donne $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur l'intervalle $]0; 2[$, qu'on appellera α. Positionner α sur le graphique de la question d) et on donner une valeur approchée.
5. Montrer que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
6. Calculer $I = \int_1^\alpha f(x)dx$ en fonction de α et interpréter géométriquement cette intégrale, à l'aide du tracé de la question d).

EXERCICE 3 : Probabilités (10 points)

On dispose de deux urnes contenant des boules indiscernables au toucher :
l'urne A contient 2 boules rouges et 3 boutes blanches,
l'urne B contient 2 boules rouges et 2 boules blanches.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

On effectue dans ces urnes des tirages successifs d'une boute, avec remise de la boule tirée dans son urne après chaque tirage, de la manière suivante :

- Le premier tirage s'effectue dans l'urne A.
- Si un tirage a donné une boule rouge, le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne.
- Si un tirage a donné une boute blanche, le tirage suivant s'effectue dans la même urne.

On note A_n l'événement: "le $n^{ième}$ tirage a lieu dans l'urne A" et a_n sa probabilité, et on note B_n l'événement : "le $n^{ième}$ tirage a lieu dans l'urne B" et b_n sa probabilité, où n est un entier supérieur ou égal à 1.

1. Quelles sont les valeurs de a_1 et b_1 ?
2. Quelle est la relation entre a_n et b_n ?
3. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que : $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}a_n$.
   Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Exprimer a_n puis b_n en fonction de n.
4. Que valent $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$?

Partie B

Dans l'urne A (qui contient 2 boules rouges et 3 boules blanches), on effectue deux tirages successifs sans remise de la boule tirée entre les deux tirages.
On note X la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la première boule tirée est rouge et la valeur I si elle est blanche
On note Y te nombre de boules blanches tirées.

1. Préciser la loi de X.
2. Décrire les événements $[(X = 0) \cap (Y = 1)]$ et $[(X = 1) \cap (Y = 2)]$, et préciser leur probabilité.
3. Donner, sous la forme d'un tableau à double entrée, la lot du couple $(X; Y)$.
4. En déduire la loi de Y et calculer son espérance.
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Partie C

On utilise encore l'urne A (contenant, rappelons-le, 2 boules rouges et 3 boules blanches) et on effectue dans cette urne 600 tirages successifs et avec remise d'une boule.
On note Z le nombre de boules blanches obtenues sur les 600 tirages.

1. Reconnaître la loi de Z et préciser son espérance et sa variance.
2. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $P\left(|Z - 360| \geqslant 24\right)$.
3. Montrer que l'on peut approcher la loi de Z par une loi normale dont on précisera les paramètres.
4. A l'aide de l'approximation proposée à la question précédente, et sans tenir compte de la correction de continuité, calculer $P(Z \geqslant 384)$ et $P(Z \leqslant 336)$.
   On donne $\Phi(2) = 0,97725$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
5. Comparer les résultats obtenus à la question 4 avec la majoration de la question 2.