ESG 2005 Option économique Math I

AVIS : Nous rappelons que l'usage des calculatrices est interdit
Aucun document n'est autorisé. Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats et à donner des démonstrations complètes de leurs affirmations.

EXERCICE DE PROBABILITÉS (sur 4 points)

Un candidat participe à un jeu télévisé où on lui pose cinq questions. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, une seule bien sûr étant correcte. Le candidat est gagnant s'il a fourni au moins quatre réponses exactes. Si le candidat ne connaît pas la réponse, il répond au hasard ; sinon il fournit la bonne réponse avec une probabilité égale à 1. Soit p la probabilité qu'il connaisse la réponse pour chacune des questions.

1. Déterminer la probabilité r que le candidat réponde correctement à une question particulière.
2. Exprimer en fonction de r la probabilité π qu'il soit gagnant.
3. Sachant que le candidat a gagné, calculer en fonction de p la probabilité α qu'il ait répondu exactement à toutes les questions.
4. Au début du jeu, on présente au candidat trois enveloppes contenant le questionnaire qui lui sera remis et il en choisit une au hasard. Sachant qu'il connaît quatre réponses dans l'enveloppe E_1 et deux dans les enveloppes E_2 et E_3, calculer sa probabilité de gain g.

EXERCICE D'ALGÈBRE (sur 6 points)

On note E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2, muni de sa base canonique $B = (1; X; X^2)$.
Soit u l'application définie sur E par $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & u(P) \end{array}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(P)(x) = (2x+1)P(x) - (x^2-1)P'(x),$$

où P' désigne la dérivée première du polynôme P.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice M de u relativement à la base B.
3. Déterminer les valeurs propres de u et les sous espaces propres associés.
   L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

EXERCICE D'ANALYSE (sur 10 points)

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$
On note C_n la courbe représentative de f_n.

Partie A

1. (a) Étudier les variations de f_n ainsi que les branches infinies de sa courbe C_n (on ne construira pas cette courbe).
   Effectuer un tableau de variation pour chacun des cas $n = 0$; $n = 1$; $n \geqslant 2$.

   (b) Démontrer que lorsque n décrit $\mathbb{N}$ les courbes C_n passent par un point fixe Ω que l'on déterminera.

2. Étude des fonctions f_0 et f_1.

   (a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f_0(-x)$. Que peut-on en déduire pour les courbes C_0 et C_1 ?

   (b) Calculer $f_0''(x)$. Pour quelle valeur x_0 a-t-on $f_0''(x_0) = 0$?
   Trouver une équation de la tangente à C_0 au point d'abscisse x_0.

   (c) Démontrer que le point Ω est centre de symétrie pour chacune des courbes C_0 et C_1.

3. Étude de la fonction f_2.

   (a) Démontrer que l'application f_2 admet une fonction réciproque notée φ dont on précisera l'ensemble de définition et quelques propriétés (continuité, sens de variation, dérivabilité). On notera Γ la courbe représentative de φ.

   (b) Trouver une équation de la tangente à C_2 au point d'abscisse nulle et une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$

1. (a) Calculer u_0.

   (b) Étudier $u_0 + u_1$; en déduire la valeur de u_1.

2. (a) Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad v_n = u_n + u_{n+1}$
   Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad v_n = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$.

   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

3. Après avoir étudié le signe de u_n montrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?