ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTIONS : GENERALE (2h)

Exercice 1

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$.
Soient $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

On considère $\mathbb{Z}^n$ comme sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}^n$.

1. Soit Φ l'homorphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
   Si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est un élément de $\mathbb{Z}^n$, on pose
   $$\theta(x) = \Phi(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$
   Montrer que θ est un homorphisme de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   Déterminer son noyau K et son image.
   Quel est le nombre d'éléments du groupe $\mathbb{Z}^n/K$?

2. Montrer que K est l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}^n$ tels que $f(x, x)$ soit pair, et aussi le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par les vecteurs
   $$e_i - e_n, \quad e_i + e_n \qquad (1 \leqslant i \leqslant n - 1)$$

3. Soit S l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}^n$ tels que $f(x, x) = 1$ ou $f(x, x) = 2$.
   Déterminer les éléments de S et leur nombre.

4. On pose
   $$a_1 = e_1 - e_2, \quad a_2 = e_2 - e_3, ..., a_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \quad a_n = e_n.$$
   Montrer que les vecteurs $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Etant donné un élément $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, calculer ses coordonnées par rapport à la base $(a_1, a_2, ..., a_n)$?
   Exprimer les éléments de S comme combinaison linéaire des vecteurs $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

5. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de base $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$. Quelle relation vérifient les coordonnées d'un vecteur x de V par rapport à la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.
   On pose $T = S \cap V$. Déterminer les éléments de T et leur nombre. Calculer $f(x, x)$ pour un élément de T.
   On pose $a'_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, montrer que V est l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(x, a'_n) = 0$
   Montrer que $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a'_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

6. Soit i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n - 1$. Montrer qu'il existe un vecteur b_i de $\mathbb{R}^n$, et un seul, tel que
   $$\begin{array}{cccl} (1) & f(b_i, a_j) & = & \delta_{i,j} \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n-1 \text{ et} \\ (2) & f(b_i, a'_n) & = & 0 \end{array}$$
   On déterminera b_i par ses coordonnées relativement à la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

7. Montrer en utilisant les relations (1) et (2) que $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ sont linéairement indépendantes et forment une base de V. Exprimer les b_i comme combinaison linéaire de a_j. Pour $n = 4$, calculer la matrice de passage M de la base $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ à la base $(b_1, b_2, ..., b_{n-1})$.

Exercice 2

Dans un magasin se trouvent quatre lots de pièces dont les proportions de défectueux sont 5%, 5%, 8%, 10%. Les étiquettes ont été perdue. dans chacun des lots, on prélève un échantillon de 10 pièces : l'un des échantillons ne comporte aucun défectueux, deux échantillons comportent un défectueux, un échantillon comporte deux défectueux.
Au vu de ces résultats, on choisit une façon d'affecter les étiquettes.

1. Combien y-a-t-il d'affections possibles ?
2. Pour chacune des affectations, évaluer la probabilité qu'elle soit correcte.

Exercice 3

On se propose d'étudier l'ensemble E des suites (U_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

1. Montrer que l'addition de deux suites et la multiplication d'une suite par un réel confèrent à l'ensemble E une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.
2. Montrer qu'une progression géométrique (r^n), r non nul, appartient à E, si et seulement r vérifie la relation

   $$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

   Calculer les valeurs de r qui répondent à la question.
3. Montrer que tout suite $(\lambda 2^{-n} + \mu 2^n)$, où λ et μ désignent deux réels arbitraires, appartient à E.
4. Soient a et b deux réels. Montrer qu'il existe dans E au plus une suite (U_n) vérifiant $U_0 = a$ et $U_1 = b$.
5. Utiliser le résultat de la question précédente pour montrer qu'à chaque élément (U_n) de E, on peut associer un couple unique (λ, μ) de nombres réels tel que $(U_n) = (\lambda 2^{-n} + \mu 2^n)$.
6. Soient a et b deux nombres réels. Montrer qu'il existe dans E une suite (U_n) vérifiant $U_0 = a$ et $U_1 = b$.
   Application : Calculer λ et μ quand $a = 0$ et $b = \dfrac{3}{2}$, puis quand $a = 2$ et $b = \dfrac{5}{2}$.