ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTIONS :GENERALE (4h)

Problème 1

N.B. - Les parties B et C, sauf une partie de B.2. sont indépendantes de A.
Les question C.1 et C.2 peuvent être traitées sans qu'une base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ ait été trouvé en B.3.

Partie A

Soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$ et telle que, pour tout x élément de $[-1, 1]$, $f(x) \geqslant 0$.
On sait alors que $\int_{-1}^{1} f(x)dx \geqslant 0$
On suppose, en outre, qu'il existe un nombre x_0 de l'intervalle $[-1, 1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$, c'est-à-dire que f n'est pas la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

A.1 Montrer, en utilisant la définition de la continuité d'une fonction, qu'il existe au moins un intervalle $[a, b]$ inclus dans $[-1, 1]$ avec $a \neq b$ et tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{f(x_0)}{2}$$

A.2 En déduire que, pour tout x appartenant à cet intervalle $[a, b]$, on a $f(x) \geqslant \frac{1}{2} f(x_0)$ puis que $\int_{a}^{b} f(x)dx > 0$.

A.3 Montrer alors que $\int_{-1}^{1} f(x)dx > 0$.

Partie B

Soit E l'ensemble des fonction polynômes à coefficients réels, définies sur $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à 2.

B.1 Montrer brièvement que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de E ?

B.2 Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

est un produit scalaire sur E.
(On pourra utiliser la partie A pour démontrer l'une des propriétés du produit scalaire)
On posera

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx =< f, g > \quad \text{et} \quad \sqrt{< f, f >} = \|f\|$$

B.3 Vérifier que les fonctions polynômes P_0 et P_1 définies, pour tout x réel, par $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$, sont orthogonales pour ce produit scalaire, c'est-à-dire que $< P_0, P_1 >= 0$
Déterminer une fonction polynôme P_2 de degré 2 orthogonale à P_0 et à P_1.
Calculer $\|P_0\|$, $\|P_1\|$, $\|P_2\|$.
En déduire une base orthonormée $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de E.

Partie C

Pour toute fonction polynôme P, élément de E, c'est-à-dire à coefficients réels, définies sur $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à 2, on pose :

$$I(P) = \int_{-1}^{1} (e^x - P(x))^2 dx$$

On se propose de déterminer un polynôme P_m de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$(1) \qquad \forall P \in E, \quad I(P_m) \leqslant I(P)$$

et de calculer $I(P_m)$.
Pour cela, on pose $P = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ où $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ désigne la base orthonormée trouvée en B.3 et $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ trois nombres réels.

C.1 Déterminer, sans calcul, $\int_{-1}^{1} (P(x))^2 dx$ en fonction de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

C.2 On suppose connues les intégrales

$$a_i = \int_{-1}^{1} e^x \varphi_i(x) dx \text{ pour } i \in \{0, 1, 2\}$$

Démontrer que

$$I(P) = \int_{-1}^{1} e^{2x} dx + (\alpha_0 - a_0)^2 + (\alpha_1 - a_1)^2 + (\alpha_2 - a_2)^2 - (a_0)^2 - (a_1)^2 - (a_2)^2$$

Comment faut-il choisir $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ pour que $I(P)$ soit le plus petit possible ?
En déduire qu'il existe un polynôme P_m de E, et un seul, satisfaisant (1).

C.3 Calculer $\int_{-1}^{1} e^x dx$, $\int_{-1}^{1} xe^x dx$, $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)e^x dx$
En déduire

a) a_0, a_1, a_2

b) $I(P_m)$

c) L'expression explicite de $P_m(x)$ sous la forme : $a + bx + cx^2$ avec a, b, c réels.

Problème 2

Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par l'égalité

$$f(x) = (ax + b)e^{2x} + (cx + d)e^{-2x},$$

où a, b, c, d sont des réels.

1. On pose $f(x) = (ax + b)e^{2x} + (cx + d)e^{-2x}$. Calculer les nombres $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

2. Démontrer que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que les applications f_1, f_2, f_3, f_4 définies par les égalités

$$f_1(x) = xe^{2x}; \quad f_2(x) = e^{2x}; \quad f_3(x) = xe^{-2x}; \quad f_4(x) = e^{-2x}$$

forment une base de l'espace vectoriel E.

4. Soit P l'ensemble des applications paires de E, soit I l'ensemble des applications impaires de E.
   (a) Déterminer les ensembles P et I.
   (b) Démontrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (c) Démontrer que les applications h_1 et h_2 définies par les égalités :
   $$h_1(x) = xe^{2x} - xe^{-2x} \quad \text{et} \quad h_2(x) = e^{2x} + e^{-2x}$$
   forment une base de l'espace vectoriel P, et que les applications h_3 et h_4 définies par les égalités :
   $$h_3(x) = xe^{2x} + xe^{-2x} \quad \text{et} \quad h_4(x) = e^{2x} - e^{-2x}$$
   forment une base de l'espace vectoriel I.

5. Soit désormais E_1 l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par l'égalité :
   $$f(x) = (ax + b)e^{2x},$$
   où a et b sont des réels.
   (a) Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. Montrer que les applications f_1 et f_2 forment une base de l'espace vectoriel E_1.
   (b) Soit g l'application définie par l'égalité
   $$\forall f \in E_1, \quad g(f) = f'$$
      i. Démontrer que g est un endomorphisme de E_1.
      ii. Déterminer la matrice de g dans la base (f_1, f_2); en déduire que g est un automorphisme de E_1.
      iii. Soit g^{-1} l'application réciproque de g; vérifier que si on pose $\varphi = g^{-1}(f)$, alors l'application φ est une primitive de f; déterminer la matrice de g^{-1} dans la base (f_1, f_2).
      iv. On pose $f(x) = (-2x + 1)e^{2x}$, calculer :
      $$\int_0^2 (-2x + 1)e^{2x} dx$$