ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : ECONOMIQUE

EXERCICE 1

On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels ou des complexes}$$

1. Calculer A^2 et vérifier $A^2 = A + 2I$
   En déduire que A est inversible et exprimer la matrice inverse A^{-1} en fonction de A et I.

2. Montrer que A^n peut être écrite sous la forme

   $$A^n = u_n A + v_n I$$

   n étant un entier positif.
   Exprimer $\alpha_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1}$ et $\beta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction respectivement de α_n et β_n; calculer α_n et β_n en fonction de n; en déduire u_n et v_n en fonction de n.
   Cette expression peut-elle être utilisée quand n est nul ou quand n est un entier négatif ?

3. Montrer que M est une combinaison linéaire de A et de I. Peut-elle satisfaire à $M^2 = M + 2I$?

4. On considère l'ensemble $(\mathfrak{M})$ des matrices M : montrer que $(\mathfrak{M})$ est un anneau commutatif unitaire quand on le dote des lois habituelles d'addition et de multiplication matricielles.
   Cet anneau possède-t-il des diviseurs de 0 ?

EXERCICE 2

Soit f la fonction qui à $x \in \mathbb{R}_+$ fait correspondre le nombre :

$$\begin{cases} f(x) = \log_x(x+1) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Préciser le domaine de définition de f et montrer que f est continue à droite en 0.

2. Etudier les variations de f et construire le graphique, (C), de ces variations. Préciser la tangente en 0 à (C).

3. Soit φ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}_+$ fait correspondre le nombre $\varphi(x) = \log_{x+1}(x)$.
   Préciser le domaine de définition et déduire de l'étude de ses variations de celle de f. Construire le graphe, (C'), de φ et déterminer les coordonnées du point commun A à (C) et à (C')

4. Résoudre l'inéquation :

   $$\log_x(x+1) \geqslant \log_{x+1}(x)$$

EXERCICE 3

On réalise une suite illimitée d'épreuves identiques et indépendantes. A chacune d'elles un évènement E a la probabilité p de se produire et la probabilité q ($q = 1 - p$) de ne pas se produire (p et q sont supposés non nuls). Soit X la variable aléatoire : nombre d'épreuves nécessaires à la réalise de l'évènement E pour la première fois. X prend ses valeurs sur l'ensemble des entiers positifs.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Soient deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivant la loi précédente.
   Quelle est la loi de probabilité de $Y = \max(X_1, X_2)$?
3. Calculer la probabilité pour que $X_1 = k$ sachant que $Y = n$.
4. Quelle est la loi de probabilité de $Z = X_1 + X_2$?
5. Calculer la probabilité pour que $X_1 = k$ sachant que $Z = n$.

EXERCICE 4

Pour une même durée de travail, les salaires d'une entreprise se répartissent comme suit :

salaire en Francs	Nombres de personnes
3000 à 4000	11
4000 à 5000	26
5000 à 6000	63
6000 à 7000	81
7000 à 8000	35
8000 à 9000	21
9000 à 10000	13

1. Déterminer le salaire médian, calculer le salaire moyen.
2. Calculer la variance et l'écart-type de la série. Déterminer la médiale.
3. Tracer la courbe de concentration et calculer l'indice de Gini.