ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : ECONOMIQUE

EXERCICE I

1. A tout nombre réel x, on associe la matrice carrée d'ordre 2 :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 3x+1 & 3x \\ -x & -x+1 \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, il existe $t \in \mathbb{R}$ (dépendant de x et y) tel que $\phi(x)\phi(y) = \phi(t)$. En posant $A = \phi(1)$, vérifier que $A.\phi(x) = \phi(3x+1)$.

2. En déduire les puissances de A^n de la matrice A sont toutes de la forme :

$$A^n = \phi(x_n) \text{ avec } x_n = 3x_{n-1} + 1 \text{ pour tout } n \geqslant 1$$

En posant $y_n = x_n + \frac{1}{2}$, trouver une relation simple entre y_n et y_{n-1} et en déduire l'expression explicite de x_n en fonction de n, ainsi que celle de A^n.

3. Démontrer que : $A^n = 3^n B + C$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ où B et C sont des matrices carrées d'ordre 2, indépendantes de l'entier n, que l'on déterminera.

4. Pour tout x réel, posons $A^x = 3^x B + C$. Montrer que cela permet de définir les puissances quelconques de A, en vérifiant que : A^{-1} est bien l'inverse de A et que $A^{1/2}$ est bien une racine carrée de A.
Montrer que pour tout couple de nombres réels (x, y) :

$$A^x A^y = A^{x+y}$$

EXERCICE II

Pour tout x réel différent de $+1$ et -1, posons

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{(x^2-1)^2}.$$

Pour tout x vérifiant $|x| < 1$, posons :

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. (a) Justifier, sommairement, l'existence, la continuité et la dérivabilité de F sur l'intervalle $]-1, 1[$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable dans l'intégrale définissant F, que F est impaire.
   (c) Calculer $F(x)$ en utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $f(x)$. Retrouver, ainsi, les résultats de a) et b).

2. Pour $|x| \neq 1$, posons : $G(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 2}{x^2 - 1} + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.
   (a) Montrer que la restriction de G à $]-1, 1[$ est une primitive de f.
   (b) Etudier les variations de G en précisant son comportement aux points -1; $+1$; et $\pm\infty$.
   (c) Tracer la courbe représentative de G et montrer qu'elle admet un centre de symétrie.

EXERCICE III

D'une urne contenant, en nombre égal, des boules blanches et des boules noires, on extrait successivement six boules (avec à chaque fois, remise de la boule tirée dans l'urne).
On marque 2 points pour une boule blanche et 5 points pour une boule noire et l'on appelle S la variable aléatoire représentée par la somme des points obtenus.

1. Quelle est la loi de probabilité de S ?
2. Calculer sa moyenne $\overline{S}$ et son écart-type σ_S.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, calculer la probabilité pour que l'écart $\left|S-\overline{S}\right|$ soit > 5 ou > 10.
4. Effectuer le même calcul en utilisant la loi de probabilité de S. Comparer les résultats.

EXERCICE IV

Soit $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 et à coefficients réels. Posons

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} \qquad , \qquad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

et $Z(A)=\{M\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \quad ; \quad MA=AM\}$

1. Montrer que $Z(A)$ est un sous-espace vectoriel réel, dont une base est (I,A).
2. Montrer que $A^{-1}\in Z(A)$ et $A^n\in Z(A)$ pour tout entier n dans $\mathbb{N}$.
3. On pose pour tout entier naturel n, $A^n=u_nA+v_nI$.
   (a) Etablir que $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ et $A^n=\begin{pmatrix}u_{n-1}&u_n\\u_n&u_{n+1}\end{pmatrix}$
   (b) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^\times$:
   $$u_{n-1}\times u_{n+1}-(u_n)^2=(-1)^n.$$
   (c) En remarquant que $A^{2n}=A^n.A^n$, montrer que
   $$u_{2n-1}=(u_{n-1})^2+(u_n)^2 \quad \text{et} \quad u_{2n}=u_{n-1}\times u_n+u_n\times u_{n+1}$$
4. Montrer qu'il existe une matrice inversible P et deux nombres réels α et β tels que
   $$A^n=P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha^n&0\\0&\beta^n\end{pmatrix}P$$
   En déduire que :
   $$u_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}.$$
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}$.