ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

PROBLEME I

Dans tout le problème, ω désigne le nombre réel $\sqrt[3]{3}$, $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre trois à coefficients complexes, I l'élément neutre de $\mathfrak{M}$ et j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

Partie 1

Pour $a, b, c \in \mathbb{C}$ (corps des complexes), on pose

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{E} = \{M(a,b,c) \quad / \quad a,b,c \in \mathbb{C}\}$.

1. (a) Montrer que l'application $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathfrak{M}$ définie par $\phi(a,b,c) = M(a,b,c)$ est linéaire et que c'est une bijection de $\mathbb{C}^3$ sur $\mathcal{E}$.

   (b) En déduire que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$. Montrer que

   $$I, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   forment une base de $\mathcal{E}$ et que pour tous a, b, c dans $\mathbb{C}$, on a

   $$M(a,b,c) = aI + bU + cV$$

2. (a) Calculer U^2 et U^3. En déduire la valeur de U^n avec $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que $\mathcal{E}$ muni de l'addition et de la multiplication de $\mathfrak{M}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathfrak{M}$.

3. (a) Soit $A \in \mathfrak{M}$. Montrer que la propriété " $\forall M \in \mathcal{E}, \quad AM = MA$ " équivaut à " $AU = UA$ ".

   (b) Montrer que $AU = UA$ si, et seulement si, $A \in \mathcal{E}$.

4. (a) Calculer le déterminant $\det(M(a,b,c))$ et démontrer qu'il est égal au produit :

   $$(a + b\omega + c\omega^2)(a + jb\omega + j^2c\omega^2)(a + j^2b\omega + jc\omega^2)$$

   (b) Démontrer que lorsque a, b et c sont des nombres *rationnels* non nuls, $M(a,b,c)$ est inversible (on pourra se ramener au cas où a, b, c sont des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble).

5. (a) Calculer $M(a,b,c) \times M(a, jb, j^2c)M(a, j^2b, jc)$.

   (b) En déduire, lorsqu'il existe, l'inverse de $M(a,b,c)$ et montrer qu'il appartient à $\mathcal{E}$. Soit alors $(M(a,b,c))^{-1} = M(r,s,t)$, calculer r, s, t en fonction de a, b et c.

Partie 2

1. (a) Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$ (on pourra utiliser la question 4)a)).
   (b) Montrer que ces valeurs propres sont distinctes si, et seulement si, $b^3 - 3c^3 \neq 0$.
   Etablir que si a, b et c sont rationnels, $M(a,b,c)$ est diagonalisable.

2. (a) Quelles sont les valeurs propres de U ? Montrer que si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour U, il l'est pour $M(a,b,c)$, à quelle valeur propre de $M(a,b,c)$ correspond-il ?
   (b) Montrer que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ sont diagonalisables et qu'il existe une matrice inversible P de $\mathfrak{M}$ telle que pour tout M de $\mathcal{E}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale. Expliciter une telle matrice P.

PROBLEME II

1. On considère la fonction $g(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}$; $(x > 0)$
   Tracer le graphe de cette fonction; en déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

2. Montrer que la fonction $y = (1 + \frac{1}{x})^x$, où x est positif, est une fonction croissante de x qui converge vers e lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a :
$$(1) \qquad \ln t \leqslant t - 1.$$

4. Soit $(x_k)_{k\in\{1,2,..,n\}}$ n nombres réels positifs. En appliquant (1) à chacune des valeurs :
$$t_i = \frac{x_i}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$
   montrer que
$$(2) \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$
   Montrer que l'égalité (2) est équivalente à la suivante :
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

5. On considère les suites de terme général :
$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad (n \geqslant 1) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \quad (n \geqslant 1)$$
   (a) Montrer que u_n converge en croissant vers e et que $v_n \leqslant e$ pour tout $n \geqslant 1$.
   (b) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k \ln(1 + \frac{1}{k}) \geqslant \int_1^n x \ln(1 + \frac{1}{x}) dx$$
   (c) En appliquant l'inégalité (2) à v_n, montrer que v_n est minorée par le terme général d'une suite qui converge vers e.
   En déduire que la suite v_n converge vers e.