ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : ECONOMIQUE

EXERCICE I

On considère les applications f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}, \qquad g(x) = e^{x}, \qquad h(x) = e^{2x}.$$

Pour tout nombre réel x, on définit les matrices :

$$D(x) = \begin{pmatrix} f(x) & 0 & 0 \\ 0 & g(x) & 0 \\ 0 & 0 & h(x) \end{pmatrix}; \qquad E(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{pmatrix}$$

où f', g', h', et f'', g'', h'' sont respectivement les dérivées premières et secondes des fonctions f, g, h.
On note :

$$D'(x) = \begin{pmatrix} f'(x) & 0 & 0 \\ 0 & g'(x) & 0 \\ 0 & 0 & h'(x) \end{pmatrix}; \qquad E'(x) = \begin{pmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \\ f'''(x) & g'''(x) & h'''(x) \end{pmatrix}$$

où f''', g''', h''' sont les dérivées troisièmes des fonctions f, g, h.

1. Déterminer trois matrices A, L, M à éléments constants (c'est-à-dire indépendants de x) telles que pour tout x, on ait :
$$E(x) = A.D(x); \qquad D(x) = L.D'(x); \qquad E'(x) = M.E(x).$$

2. Montrer que L est inversible et trouver que $A = MAL^{-1}$.

3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

EXERCICE II

I)

Soit m un nombre réel non nul et soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = x + m(1+x)e^{-x}.$$

On désigne par (C_m) la courbe représentative de la fonction f_m; le plan étant rapporté à un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de la fonction f'_m (dérivée de f_m).

2. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f'_m(x) = 0$.
On précisera la position de ces solutions par rapport à 0 et 1.

3. Etudier le sens de variation de la fonction f_m.
On précisera les limites de f_m quand x tend vers $\pm\infty$ et l'on étudiera les branches infinies de (C_m).

4. Montrer que toutes les courbes (C_m) ont un point commun unique.

5. On admettra que l'équation $f'_{-1}(x) = 0$ a une solution unique vérifiant $-0,57 < x_0 < -0,56$ et que l'équation $f'_4(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 vérifiant $0,35 < x_1 < 0,36$ et $2,15 < x_2 < 2,16$.
Construire les courbes C_{-1}, C_e et C_4 sur une même figure en prenant 2 cm comme unité, e étant la base de l'exponentielle népérienne ($e \simeq 2n71828...$)

II)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx \text{ où } n \text{ est un entier naturel.}$$

1. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
2. Calculer u_n en fonction de n pour tout n entier naturel.

EXERCICE III

On applique la loi de Poisson au nombre de personnes se présentant au guichet $n°$ 1 d'un bureau de poste. Ce guichet traite deux catégories d'opérations : téléphone et poste aérienne.

On suppose que pendant un intervalle de temps T exprimé en minutes; le nombre de personnes se présentant au guichet $n°$ 1 pour une opération téléphonique est représentée par une variable aléatoire X_a dont la loi est une loi de Poisson de paramètre aT $(a > 0)$; et que le nombre de personnes se présentant pour un envoi en poste aérienne est représenté par une variable aléatoire X_b dont la loi est une loi de Poisson de paramètre bT $(b > 0)$

Les variables aléatoires X_a et X_b sont indépendantes.

1. (a) Montrer que la variable aléatoire associée au nombre de personnes se présentant au guichet $n°$ 1 suit une loi de Poisson de paramètre $(a + b)T$. Ce résultat sera considéré comme admis pour la suite du problème.
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait moins de 3 clients se présentant au guichet $n°1$ pendant un laps de temps égal à $\dfrac{2}{a+b}$ minutes (on donne $e^{-2} \simeq 0,0183$).
2. Les employés doivent terminés leur travail à 18h30; en conséquence, le bureau ferme ses portes à 18h15.
   Or à 18h15, il y a une queue de N personnes au guichet $n°$ 1; ces personnes étant arrivées entre 18h05 et 18h15.

   (a) Exprimer en fonction de a, b, N la loi de la variable aléatoire associée au nombre de personnes de cette queue qui sont venues pour une opération téléphonique.
   (b) Pour $N = 5$; $a = 0,3$ et $b = 0,1$; calculer la probabilité pour que dans cette queue, le nombre de personnes venues pour un appel téléphonique soit inférieur au nombre de personnes venues pour un envoi en poste aérienne.
   (c) Soit $E(X_a/X_a+X_b = N)$ l'espérance de X_a pour la probabilité conditionnelle sachant que $X_a+X_b = N$.
   Calculer $E(X_a/X_a + X_b = N)$ pour les valeurs numériques de b) $(N = 5$; $a = 0,3$ et $b = 0,1)$

EXERCICE IV

I)

Soit (q_n), (r_n) et (s_n) trois suites définies par : $r_0 = 1$, $q_0 = s_0 = 0$ et pour tout entier naturel n non nul

$$q_n = \frac{2}{3}r_{n-1}; \quad r_n = \frac{1}{3}q_{n-1} + \frac{2}{3}s_{n-1}; \quad s_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre r_n et r_{n-2}.
2. Montrer que $r_{2k+1} = 0$ pour tout k entier naturel.
3. Calculer r_{2k}.
4. En déduire les expressions de q_n et s_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

II)

Deux joueurs A et B jouent à un jeu de hasard formé d'une suite de parties indépendantes.
La probabilité de gagner une partie pour A (de perdre pour B) est $\frac{2}{3}$.
La probabilité de gagner une partie pour B (de perdre pour A) est $\frac{1}{3}$.
Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs a gagné 2 parties de plus que l'autre.
On désigne par p_k, q_k, s_k, t_k la probabilité des évènements suivants : Immédiatement après la $k^{ième}$ partie :

- Le joueur A a gagné 2 parties de plus que B (p_k)
- Le joueur A a gagné 1 parties de plus que B (q_k)
- Les deux joueurs ont gagné autant de parties (r_k)
- Le joueur B a gagné 1 partie de plus que A (s_k)
- Le joueur B a gagné 2 parties de plus que A (t_k)

1. Justifier le fait que r_k, s_k, t_k vérifient les relations du I)
2. Déterminer p_k et t_k en fonction de q_{k-1} et s_{k-1}.
3. En déduire la probabilité que le jeu s'arrête immédiatement après la $k^{ième}$ partie.
4. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne le jeu à $(2n)^{ième}$ partie ?