ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : ECONOMIQUE

EXERCICE I

On considère les matrices carrées d'ordre 4 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice carrée d'ordre 4, à coefficients réels, on considère l'application ϕ_M qui à chaque polynôme P tel que $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$ associe la matrice $\phi_M(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k M^k$
(M^0 désignant la matrice unité)

1. Vérifier que $AB = BA$. Calculer A^n et B^n pour tout entier naturel n.
2. Calculer $\phi_A(P_1)$ et $\phi_B(P_1)$ dans le cas $P_1(X) = 1 + X^2$.
3. Pour chaque matrice carré d'ordre 4, on considère l'équation $\phi_M(P) = 0$.
S'il existe des solutions non nulles, on appellera solution minimale P_0 le polynôme de degré minimal et unitaire (c'est-à-dire que $P_0(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$) vérifiant $\phi_M(P_0) = 0$.
Vérifier que $P_0(X) = (X-2)(X-3)$ lorsque $M = A$.
4. On pose $S = A + B$.
   (a) Calculer S^n pour tout entier naturel.
   (b) En déduire $\phi_S(P)$ pour tout polynôme P.
   On explicitera les coefficients de la matrice $\phi_S(P)$ à l'aide des valeurs particulières prises par P et ses dérivées : $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P'(\alpha)$, $P'(\beta)$, $P''(\alpha)$, ... où α et β sont deux nombres réels à déterminer.
   (c) Montrer que $\phi_S(P) = 0$ si et seulement si P est tel que :
   $$P(X) = (X-3)(X-2)^3 Q(X) \text{ où } Q(X) \text{ est un polynôme de } \mathbb{R}[X]$$
   (d) En déduire alors la solution minimale P_0 définie dans la question 3) pour la matrice $M = S$.

EXERCICE II

Pour tout nombre réel k non nul et différent de 1, on considère la fonction

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^\times & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{x^k} = \exp(x^k \ln x) \end{array} \right.$$

1. Etudier la continuité de f_k à droite de $x = 0$.
En déduire que f_k peut être prolongée par continuité sur $[0, +\infty[$; on notera $\widetilde{f_k}$ la fonction f_k ainsi prolongée.
2. Etudier la dérivabilité de $\widetilde{f_k}$ à droite de $x = 0$.
3. Etudier les variations des fonctions $\widetilde{f_k}$.
4. Construire les diverses formes des courbes (C_k) représentatives de ces fonctions.

EXERCICE III

Soit X une variable aléatoire réelle associée à l'intervalle de temps séparant deux arrivées successives d'un évènement.
On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre (θ, σ) (où θ et σ sont deux nombres réels strictement positifs) si X est absolument continue et admet pour densité la fonction $f_{\theta,\sigma}$ définie par :

$$\begin{cases} f_{\theta,\sigma}(x) & = & 0 & \text{si } x < \theta \\ f_{\theta,\sigma}(x) & = & \dfrac{1}{\sigma}\exp(\dfrac{x-\theta}{\sigma}) & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition $F_{\theta,\sigma}$ de X.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$
3. (a) On observe un couple de variables aléatoires (X, Y) indépendantes et de loi exponentielle (θ, σ). Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z = \inf(X, Y)$? Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
   (b) Plus généralement, on observe les intervalles séparant des arrivées successives et on appelle (X_n) la suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de loi exponentielle de paramètre (θ, σ). Quelle est la loi de la variable aléatoire associée au plus petit des n premiers intervalles : $Z = \inf(X_1, X_2, ..., X_n)$?
   Vérifier que $E(Z) = \theta + \dfrac{\sigma}{n}$ et $V(Z_n) = \dfrac{\sigma^2}{n^2}$.

EXERCICE IV (Les parties A et B sont indépendantes)

Une fonction numérique strictement positive f représente une fonction de demande d'un consommateur si elle exprime de lien entre les quantités demandées "y" et le prix "x" d'un bien $y = f(x)$.

Partie A :

Soit x un nombre réel strictement positif, on définit l'élasticité $e(y/x)$ de la demande d'un bien par rapport à son prix par :

$$e(y/x) = \frac{xf'(x)}{f(x)} \text{ où } f' \text{ désigne la dérivée de } f \text{ par rapport à } x.$$

1. Si x est un nombre réel strictement positif et n un entier naturel non nul, calculer l'élasticité $e(y/x)$ dans les cas suivants :
   (a) $y = f(x) = cx^n$
   (b) $y = f(x) = cx^{-n}$
2. Si f et g sont deux fonctions numériques strictement positives telles que $y = f(x)$, $z = g(x)$; calculer $e(yz/x)$ en fonction de $e(y/x)$ et $e(z/x)$.
3. On pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, où ln désigne le logarithme népérien. Exprimer $e(y/x)$ en fonction de la dérivée de Y par rapport à X.

Partie B :

Une entreprise fixe le prix x d'un certain produit dont les quantités demandées sont représentées par la variable y.
En supposant la demande totalement satisfaite, on définit les fonctions suivantes de la variable y :

- Fonction de coût total : $C(y)$
- Fonction de coût moyen : $C_m(y) = \dfrac{C(y)}{y}$.
- Fonction de coût marginal : $C_M(y) = C'(y)$ où C' désigne la dérivée de C par rapport à y

I)

Montrer que la courbe représentative du coût marginal coupe la courbe représentative du coût moyen en son minimum.

II)

On suppose désormais que $C(y) = \dfrac{y^3}{40} - 3y^2 + 150y + 1875$

1. (a) Etudier succinctement les variations de la fonction C'_m sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   (b) En déduire l'existence d'un nombre réel α unique vérifiant $C'_m(\alpha) = 0$.
   Vérifier l'encadrement $68,08 < \alpha < 68,09$.
   (c) Etudier alors les variations des fonctions C_M et C_m.
   (d) Vérifier graphiquement le résultat de la question I).

2. En supposant de plus que la fonction de demande est de la forme $y = f(x) = \dfrac{1000}{x}$, on définit une fonction bénéfice $B(x)$ par

$$B(x) = 100f(x) - C(f(x))$$

   (a) Exprimer B en fonction de x.
   (b) Etudier la fonction $B(x)$ et tracer sa courbe représentative.
   (c) Pour quelle valeur de x ce bénéfice est-il maximal ?
   (d) Déterminer l'intervalle de prix à l'intérieur duquel l'entreprise fait des bénéfices.