ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

PROBLEME I

Dans tout le problème, $\mathfrak{M}_3$ désigne l'ensemble des matrices carrées à éléments réels à 3 lignes et 3 colonnes. Si A appartient à $\mathfrak{M}_3$, on note $a_{i,j}$ l'élément de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne de A ($i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$).
$\mathfrak{M}_3$ est muni de sa structure habituelle d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des réels et de sa structure d'anneau.
On considère le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{M}_3$ formé des matrices A telles que les six nombres réels

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} \ (i = 1, 2, 3) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{3} a_{k,j} \ (j = 1, 2, 3)$$

soient égaux. On note $d(A)$ la valeur commune de ces six nombres. Enfin, J désigne la matrice de $\mathfrak{M}_3$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3$ et que l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $A \mapsto d(A)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$.

2. (a) Montrer qu'une matrice A de $\mathfrak{M}_3$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que :

$$AJ = JA = \lambda J$$

   Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-anneau de $\mathfrak{M}_3$.

   (b) Si A est une matrice inversible de $\mathcal{E}$, montrer que $d(A)$ est non nul, que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$ et comparer $d(A)$ et $d(A^{-1})$.

   (c) Soit A un élément de $\mathcal{E}$. On pose $B = \dfrac{d(A)}{3} J$ et $C = A - B$.
   Calculer BC et CB.
   En déduire la valeur de A^p en fonction de B^p et C^p pour p entier strictement positif.

3. (a) Soient $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ constitué des matrices A telles que $d(A) = 0$ et $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ constitué des matrices de la forme λJ, où λ est un nombre réel quelconque.
   Prouver que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{E}$.

   (b) On considère les matrices suivantes :

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que l'ensemble de ces quatre matrices A_{rs} ($r = 2, 3$; $s = 2, 3$) constitue une base de $\mathcal{F}$.
   Quelles sont les dimensions de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{E}$?

4. On considère maintenant le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ formé des matrices A telles que les huit nombres réels :

$$\sum_{k=1}^{3} a_{i,k} \ (i = 1, 2, 3); \qquad \sum_{k=1}^{3} a_{k,j} \ (j = 1, 2, 3); \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{i,i} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i}$$

   soient égaux. Une telle matrice est dite matrice magique.

(a) Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ constitué des matrices magiques antisymétriques. Quelle est la valeur commune des huit sommes d'une matrice de $\mathcal{A}$?
Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{A}$.

(b) Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ constitué des matrices magiques symétriques. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{S}$.

(c) En déduire la dimension de $\mathcal{H}$.

PROBLEME II (Les parties I et II sont indépendantes)

Partie I :

On considère l'application $f_{\lambda,\mu} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu)\exp(-\dfrac{x^2}{2}) \end{cases}$ où λ et μ sont deux réels positifs.

1. Montrer que pour la construction des courbes $\Gamma_{\lambda,\mu}$ ($\lambda \neq 0$) représentatives des fonctions $f_{\lambda,\mu}$, on peut se borner à l'étude des fonctions de type $f_{1,\mu}$ ($\mu \geqslant 0$)

2. Etudier les variations de $f_{\lambda,\mu}$ ($\mu \geqslant 0$)

3. Déterminer le nombre de points d'inflexion d'une courbe $\Gamma_{\lambda,\mu}$ et construire l'ensemble de ces points lorsque μ varie.

4. Tracer les courbes $\Gamma_{1,0}$ et $\Gamma_{1,1}$ dans un repère orthonormé.

Partie II

1. On considère une suite (Q_n) de polynômes à coefficients réels vérifiant :

$$(1) \qquad \forall k \geqslant 1, \quad Q_{k+1}(X) = XQ_k(X) + kQ_{k-1}(X)$$

(a) Montrer que si les termes d'une suite (Q_n) vérifient l'égalité (1); ils vérifient alors :

$$\forall k \geqslant 2, \quad Q'_{k+1}(X) - (k+1)Q_k(X) = X\left[Q'_k(X) - kQ_{k-1}(X)\right] + k\left[Q'_{k-1}(X) - (k-1)Q_{k-2}(X)\right]$$

où Q'_i désigne le polynôme dérivé du polynôme Q_i.
En déduire qu'à toute suite (Q_n) vérifiant l'égalité (1) est associé à une suite unique (R_n) de polynômes vérifiant l'égalité (1) et tels que :

$$\forall k \geqslant 1, \quad R_k(X) = Q'_k(X) - kQ_{k-1}(X).$$

Si $Q_0(X) = X - 1$ et $Q_1(X) = X - 1$, déterminer R_0, R_1, R_2.

(b) Démontrer l'existence d'une suite unique (P_n) de polynômes unitaires (le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1), vérifiant :

$$\forall k \geqslant 1, \quad P_{k+1}(X) = XP_k(X) - P'_k(X) \qquad \text{et} \qquad P'_k(X) = kP_{k-1}(X).$$

Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

2. Soit C l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Les dérivées d'un élément f de C seront notées f', f'', ..., $f^{(k)}$, ...
Si σ désigne un endomorphisme de C, on note $\sigma \circ \sigma = \sigma^2$ et $\sigma^{k-1} \circ \sigma = \sigma^k$; σ^0 désigne l'application identique de C.
On considère l'endomorphisme $\varphi : \begin{cases} C & \to & C \\ f & \mapsto & \varphi(f) = f' - xf \end{cases}$

(a) Déterminer $\varphi^2(f)$. Expliciter $\varphi(f)$ et $\varphi^2(f)$ pour la fonction $f_{\lambda,\mu}$ définie dans la partie I.

(b) Déterminer les noyaux $\ker\varphi$ et $\ker\varphi^2$.

(On recherchera les fonctions f éléments de ces noyaux sous la forme $f(x) = g(x)\exp(-\frac{x^2}{2})$ et on précisera les fonctions g correspondants aux cas $\ker\varphi$ et $\ker\varphi^2$).

(c) On considère les fonctions polynômes $x \mapsto P_k(x)$ où P_k sont les polynômes définis dans la question II) 1). Calculer $\varphi(P_k)$.

(d) A tout nombre réel α, on associe l'élément F_α de C défini par :

$$F_\alpha(x) = \exp\left(\alpha x - \frac{x^2}{2}\right)$$

Démontrer par récurrence sur k entier naturel :

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^k(F_\alpha(x)) = P_k(X+\alpha)F_\alpha(x)$$

(P_k désignant toujours les fonctions polynômes définies au 2)c).

(e) Si $H(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$, montrer que la dérivée $k^{ième}$ $H^{(k)}(x)$ peut s'écrire sous la forme $H^{(k)}(x) = T_k(x)H(x)$, où $T_k(x)$ est une fonction polynôme que l'on exprimera en fonction de $P_k(ix)$, i désignant le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.