ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTION : GENERALE (durée 2h)

EXERCICE I

Un ensemble est constitué de machines dont l'état de chacune est indépendant de celui des autres.
Ces machines peuvent être reliées de différentes façons :
Elles sont dites " en série " si l'ensemble est en panne dès qu'une des machines de l'ensemble est en panne.
Elles sont dites " en parallèle " si l'ensemble est panne si et seulement si toutes les machines de l'ensemble sont en panne.
L'ensemble est mis en marche au temps 0.
A un temps t fixé, on notera q la probabilité pour chacune des machines d'être en marche (les machines sont identiques).
On demande de calculer la probabilité p de l'ensemble au temps t, c'est-à-dire la probabilité pour cet ensemble d'être en marche à cet instant, en fonction de q dans les cinq cas suivants :

1. Il y a cinq machines " en série ".
2. Il y a quatre machines " en parallèle ".
3. Il y a deux batteries " en parallèle " constituées chacunes de trois machines " en série ".
4. Il y a trois machine " en parallèle partiel ", c'est-à-dire que l'ensemble est en panne si et seulement si deux au moins des trois machines sont en panne.
5. Il y a " en série " deux ensembles E_1 et E_2; l'ensemble E_1 est constitué de deux machines identiques en série; l'ensemble E_2 est le même que l'ensemble de la question 3).

EXERCICE II

Une entreprise fabrique des lampes qui sont livrées par containers de 10 000. Suite à un incident de fabrication, chaque container a été vérifié de la façon suivante :
On choisit " au hasard " 81 lampes que l'on teste. Les résultats sont :

Durée de vie en centaines d'heures	Nombres de lampes
]0,1]	22
]1,2]	22
]2,4]	22
]4,12]	15

Soit T_i la durée de vie de $i^{ième}$ lampe testée ($1 \leqslant i \leqslant 81$); d'après l'expérience, on a obtenu :

$$\overline{T} = \frac{1}{81}\sum_{i=1}^{81} T_i = \frac{1}{\ln(3/2)}$$

où ln désigne le logarithme népérien et où $\overline{T}$ est exprimé en centaines d'heures.

1. (a) Déterminer la moyenne et la variance de cette série statistique.
   (b) Tracer l'histogramme.

2. Soit X une variable aléatoire réelle positive dont la fonction de répartition est donnée par

$$\left\{\begin{array}{rcll} F(t) & = & 0 & \text{si } t < 0 \\ F(t) & = & 1 - \exp(-\frac{t}{T}) & \text{si } t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

   où t représente le temps exprimer en centaines d'heures.

   (a) On considère les intervalles de temps définis dans le précédent tableau :

$$A_1 =]0, 1], \quad A_2 =]1, 2], \quad A_3 =]2, 4], \quad A_4 =]4, 12]$$

   Calculer les probabilités $p'_k = P(X \in A_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant 4)$

   (b) On pose $p_k = \dfrac{n(k)}{81}$ où $n(k)$ désigne le nombre de lampes testées dont la durée de vie appartient à A_k.
   Montrer que la quantité $d = 81 \left[\sum_{k=1}^{4} (p_k - p'_k)^2 \dfrac{1}{p'_k} \right]$ est voisine de 2.
   Dans ce cas, on pourra considérer que la série étudiée est très schématiquement décrite par la loi proposée question 2).

      i. Calculer alors pour un particulier achetant 10 lampes " au hasard " parmi un container de 10 000 lampes, la probabilité d'en avoir deux exactement dont la durée de vie est inférieure à 100 heures.
      ii. Calculer la probabilité pour un détaillant achetant 100 lampes " au hasard " parmi un container de 10 000 lampes, d'en avoir au moins trois dont la durée de vie est inférieure à 2 heures.

EXERCICE III

Préliminaire :

Une chaine de Markov à temps discrets est une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble E d'états tel que $E = \{1, 2, ..., N\}$ telle que les probabilités pour que le système considéré soit dans l'état j à l'instant $t + s$ sachant qu'il a été dans les états i_0, i_1, ..., i_n, i aux instants t_0, t_1, ..., t_n, t ($t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t$ entiers naturels) ne dépendent que de son état i à l'instant t, c'est-à-dire :

$$P(X_{t+s}/X_{i_0} = i_0, ..., X_n = i_n, X_t = i) = P(X_{t+s} = j/X_t = i) = p_{i,j}(t, s)$$

et ceci, quels que soient les états i_0, i_1, ..., i_n, i, j éléments de E.
On s'intéresse alors aux chaines homogènes où $p_{i,j}(t, s)$ ne dépend pas de t mais de l'accroissement s du temps que l'on considèrera égal à 1 :

$$p_{i,j}(t, s) = P(X_{t+s} = j/X_t = i) = P(X_1 = j/X_0 = i) = p_{i,j}$$

On appelle matrice de transition P la matrice carrée $(p_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant N}}$

Applications :

On considère un fort pentagonal (5 sommets numérotés de 1 à 5 dans le sens des aiguilles d'une montre).
Une sentinelle se déplace d'un sommet à l'autre de telle sorte que si elle quitte un sommet, il y a une probabilité $p = \dfrac{1}{3}$ pour qu'elle décide d'aller au sommet adjacent dans le sens des aiguilles d'une montre et $1 - p = \dfrac{2}{3}$ à l'autre sommet adjacent.

1. Expliquer pourquoi cet exemple constitue une chaine de Markov homogène (définir les états X_0 et X_1)
   Ecrire la matrice de transition $P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 5 \\ 1 \leqslant j \leqslant 5}}$

2. Vérifier que $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ où $x_k = \dfrac{1}{5}$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ est solution de l'équation $XP = X$.

3. Soit $d_{i,j}$ la durée du trajet effectué par la sentinelle partie du sommet i pour atteindre pour la première fois le sommet j.
   En admettant que pour i variant de 2 à 5, on a les quatres relations : $d_{i,1} = \sum\limits_{k \neq 1} p_{i,k} d_{k,1} - 1$ et que $d_{1,1} = \dfrac{1}{x_1} = 5$, résoudre le système proposé.

4. L'ennemi cherche à s'introduire dans le fort par le sommet 1.

   (a) A quel sommet doit alors se trouver la sentinelle pour que l'ennemi dispose d'un temps d'attaque maximal ?

   (b) Sachant que la sentinelle met 1'30" pour passer d'un sommet à un autre et stationne 30" à chaque sommet, de combien de temps dispose l'ennemi ?