ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : ECONOMIQUE

EXERCICE I

On désigne par $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Soit S l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $S(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}.I + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}.K$ pour tout réel x.
   (a) Montrer que $S(x).S(x') = S(x + x')$ pour tous réels x, x'.
   (b) Calculer $(S(x))^n$ pour tout entier relatif n.
2. Soit T l'application de $\mathbb{R}^\times$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $T(y) = \dfrac{1+y}{2}.I + \dfrac{1-y}{2}L$ pour tout réel non nul y.
   Montrer que $T(y).T(y') = T(yy')$.
3. On pose $U(x, y) = S(x).T(y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times$.
   Démontrer que la matrice $U(x, y)$ est inversible et que sa matrice $U^{-1}(x, y)$ vérifie la relation :
$$U^{-1}(x, y) = T(\frac{1}{y}).S(-x)$$
4. Donner une expression simple de la matrice : $V(x, y) = U^{-1}(x, y).J.U(x, y)$

EXERCICE II

I)

On considère l'application g définie par $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0, 3\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x^2 - x - 6}{2x^2(x-3)} \end{array} \right.$

1. Déterminer les nombres réels A, B, C tels que pour tout nombre réel non nul et différent de 3, on ait :
$$g(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-3}$$
2. Déterminer l'expression des primitives de $g(x)$.
   En déduire que les fonctions $f_k(x) = ke^{-1/x}\sqrt{|x^2 - 3x|}$, où $k \in \mathbb{R}^\times$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 3\}$, sont solutions de l'équation :
$$\frac{f_k'(x)}{f_k(x)} = g(x),$$
   où f_k' désigne la dérivée de f_k.

II)

On pose $f(x) = f_1(x) = e^{-1/x}\sqrt{|x^2 - 3x|}$ pour tout nombre réel non nul.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^{\times}$.

2. Dresser le tableau des variations de f. Etudier les branches infinies.

3. Montrer que : si $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 3\}$, $\quad f''(x) = f(x).\left(g'(x) + (g(x))^2\right)$.
   Montrer que $f''(x)$ s'annule pour deux valeurs x_0 et x_1.
   Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de x_0, x_1, $f(x_0)$ et $f(x_1)$.

4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

III)

On désigne par h la fonction définie par :

$$h(x) = \ln f(x) \text{ si } x \in]3, +\infty[\qquad (\ln = \text{ logarithme népérien})$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique dans $]3, +\infty[$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution a.

2. Dresser le tableau de variations de h. Etudier les branches infinies.

3. Construire la courbe représentative de h.

4. Calculer l'aire du domaine plan défini par :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad a \leqslant x \leqslant 4 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant h(x)\}$$

EXERCICE III

On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A_1, A_2, A_3, A_4 quatre évènements sur cet espace. On pose

$$S_1 = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) \qquad S_3 = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j<k}}^{4} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$S_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{4} P(A_i \cap A_j) \quad S_4 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

1. Exprimer $P(\bigcup_{i=1}^{4} A_i)$ en fonction de S_1, S_2, S_3 et S_4.
   Pendant un spectacle, on a malencontreusement permuté les quatres chapeaux qui se trouvaient au vestiaire dans les cas numérotées.
   On désigne par A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ l'évènement : " la personne i se voit remettre son chapeau "

2. Calculer les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4 correspondant aux évènements A_i ainsi définis.

3. Montrer que la probabilité pour qu'une personne au moins parmi les quatre ayant un chapeau à l'entrée se voit remettre son propre chapeau est donnée par la formule :

$$p = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

   Calculer p.

4. En déduire la probabilité pour qu'aucune personne ne se voit remettre son chapeau.

EXERCICE IV

Une urne contient m boules noires et $n-m$ boules blanches $(m<n)$.
On tire dans cette urne N boules sans remise. $(N \leqslant n)$.

1. On définit une variable aléatoire X_k, $k \in \{1,2,...,N\}$ par :

$$\begin{cases} X_k = 1 & \text{si la } k^{ième} \text{ boule tirée est noire} \\ X_k = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Donner la loi de X_k et celle du couple (X_k, X_i) pour $i \neq k$.

2. Soit $Y = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ la variable aléatoire hypergéométrique associée au nombre de boules noires à l'échantillon.
   Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$