ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : ECONOMIQUE

EXERCICE 1 :

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $M(a,b,c) = aI + bJ + cK$ pour tout triplet (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Calculer $(bJ + cK)^p$ pour tout couple (b,c) de $\mathbb{R}^2$ et tout entier naturel non nul p.
   (b) Calculer $[M(a,b,c)]^n$ pour tout triplet (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ et tout entier naturel non nul n.
   (c) En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel non nul n.

2. On désigne par E l'ensemble des matrices M de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
   Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont (I, J, K) constitue une base.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on désigne par F_n l'ensemble des matrices M de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^n = A$.

   (a) Prouver que $F_n \subset E$.
   (b) Déterminer l'unique matrice de F_{2n+1} et la paire de matrices constituant F_{2n}.

EXERCICE 2 :

On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{x^2 + 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(ln désigne le logarithme népérien)
Pour tout entier naturel non nul n, on définit de plus la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et on pose $u_n = \int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

1. Montrer que f et f_n sont continues sur $[0, 1]$.

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^{2i+1} = \frac{x\left[1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}\right]}{1 + x^2}$$

(b) En déduire pour tout entier naturel n, la relation :

$$\int_0^1 f(x)dx = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{f_{2n+3}(x)}{1+x^2} dx$$

3. On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i u_{2i+1}$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^1 f(x)dx - S_n \right| < -u_{2n+3}$.

(b) Calculer u_p pour tout entier naturel non nul p et en déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx$.

(c) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\int_0^1 f(x)dx$.

EXERCICE 3 :

Une loterie comporte 150 billets dont 2 sont gagnants et permettent de gagner chacun 1 lot.
Un joueur achète n billets.

1. Soit $P(n)$ la probabilité pour que notre joueur de gagner au moins un lot.

   (a) Calculer $P(n)$.

   (b) Ecrire $P(n)$ sous la forme d'un polynôme du second degré en n.
   On notera Q ce polynôme.

2. Ce joueur ne connait pas les probabilités et pense avoir $\widetilde{P}(n) = \dfrac{n}{150}$ chances de gagner au moins un lot en ayant acheté n billets ($n \leqslant 150$).

   (a) Q désignant le polynôme défini dans la question 1)b), résoudre dans l'intervalle [0,150] l'équation $Q(x) = \widetilde{P}(n)$ où n est un nombre entier fixé, inférieur à 150.

   (b) En déduire le nombre de billets " réellement " suffisant pour avoir $\dfrac{n}{150}$ chances de gagner au moins un lot.
   Quelle est l'économie de billets que l'on peut faire réaliser à ce joueur ?

3. (a) Pour quelle valeur n_0 de n cette économie est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ?

   (b) Retrouver graphiquement le résultat précédent.

EXERCICE 4 :

On désigne par f, g et h les fonctions numériques de la variable réelle x définies par

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{-x^4 - x^2 + 2}}{\sqrt[6]{x^8 - 4x^5 - x^3 + 1}} \qquad g(x) = x^8 - 4x^5 - x^3 + 1 \qquad h(x) = 8x^5 - 20x^2 - 3$$

1. En étudiant les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$, montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique x_0 comprise en 1 et 2 et déterminer le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. (a) En déduire que $g(x)$ possède deux racines, et deux seulement, x_1 et x_2 telles que :

$$0 < x_1 < 1 < x_0 < x_2 < 2$$

(b) Déterminer le domaine de définition de f.

3. Montrer que le graphe C représentatif de f possède deux asymptotes parallèles à l'axes des ordonnées Oy et préciser les positions relatives graphe-asymptotes.

4. Montrer que C a une asymptote horizontale D et préciser les positions relatives de C et D.