ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION: GENERALE

PROBLEME 1

Les parties I et II sont indépendantes

NOTATIONS

Pour tout entier naturel non nul m, E_m désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m.
On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad P_n(X) = \frac{X(X-n)^{n-1}}{n} \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

Partie I

1. Vérifier que pour $n \geqslant 1$: $P_n'(X) = P_{n-1}(X-1)$.
   En déduire que pour $n \geqslant 1$: $P_n'(1) = 0$.

2. (a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que pour tout entier naturel $k < n$, on a : $P_n^{(k)}(k) = 0$ ($P_n^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P_n; par convention $P_n^{(0)} = P_n$)
   (b) Quelle est la valeur de $P_n^{(n)}(X)$?

Partie II

1. Montrer que les polynômes P_0, P_1, ..., P_m forment une base de E_m.

2. Pour tout polynôme P de E_m, montrer que les nombres $P^{(k)}(k)$ où k varie de 0 à m, constituent les coordonnées de P dans la base $(P_0, P_1, ..., P_m)$.

3. En déduire que pour tout couple de réels (x, y), on a :

$$P_m(x+y) = \sum_{k=0}^{m} P_k(x) P_{m-k}(y)$$

4. On note u l'endomorphisme de E_m qui, à tout polynôme P de E_m associe le polynôme $Q = u(P)$ défini par

$$Q(X) = P'(X+1) - P(X)$$

   Donner la matrice de u dans la base $(P_0, P_1, ..., P_m)$

Partie III

Soit m un entier naturel non nul et a un nombre négatif ou nul.

1. On considère une application g définie sur l'intervalle $I = [a, m]$, de classe C^m sur I, admettant sur $]a, m[$ une dérivée d'ordre $m+1$ et telle que $g^{(k)}(k) = 0$ pour k variant de 0 à m.
   On admet qu'il existe un point $x_0 \neq 0$ appartenant à l'intervalle $[a, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$
   Montrer que sous ces conditions, il existe un point $x \in]a, m[$ tel que :

$$g^{(m+1)}(c) = 0$$

2. Soit f une fonction définie sur I, de classe C^m et admettant sur $]a, m[$ une dérivée d'ordre $m+1$.
En posant $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(k)P_k(x) - \alpha P_{m+1}(x)$, ($\alpha$ étant une constante convenablement choisie), déduire de la question 1), pour tout x compris entre a et 1, l'existence d'un nombre $\xi \in]a, m[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(k)P_k(x) + P_{m+1}(x)f^{(m+1)}(\xi)$$

PROBLEME 2

Les parties I et II sont indépendantes

- Soit r un réel *strictement positif*, on désigne par f_r la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} f_r(x) &= (1 - x^{1/r})^r \quad \text{si } x \in]0, 1[\\ f_r(0) &= 1 \\ f_r(1) &= 0 \end{cases}$$

- On appelle (C_r) la courbe représentative de $y = f_r(x)$ pour $x \in [0, 1]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, i, j) noté $\mathcal{R}$ (unité 10 cm).

Partie I

1. (a) Etudier les variations de la fonction f_r.
   (b) Préciser l'étude de la concavité de (C_r) selon les valeurs de r.
2. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est axe de symétrie commun à toutes les courbes (C_r).
3. Construire dans $\mathcal{R}$ les courbes $(C_{1/3})$, $(C_{1/2})$, (C_1), (C_2) et (C_3) en précisant pour chaque courbe les coordonnées du point d'intersection I_r de (C_r) et de la droite d'équation $y = x$.

Partie II

Pour tout nombre réel r *strictement positif*, on pose :

$$F(r) = r \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^r dt$$

1. Justifier l'existence de $F(r)$.
2. Montrer que l'aire du domaine limité par (C_r) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, a pour valeur $F(r)$.
3. (a) Etablir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^r} \leqslant F(r) \leqslant 1 \quad &\text{si} \quad 0 < r \leqslant 1 \\ 0 < F(r) \leqslant \frac{1}{2^r} \quad &\text{si} \quad r \geqslant 1 \end{aligned}$$

   (b) En déduire $\lim_{r \to 0} F(r)$ et $\lim_{r \to +\infty} F(r)$.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Calculer $F(n)$ à l'aide d'intégrations par parties.
   (b) En développant $(1-t)^n$ à l'aide de la formule du binôme, en déduire la formule $n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{n+k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

5. On considère l'équation $(4x - x^2)\varphi'(x) - (x+2)\varphi(x) = x$ où φ est une fonction inconnue à déterminer, φ' désignant sa dérivée.

   On recherche une solution particulière sous la forme $\varphi_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où les coefficients a_n sont des nombres réels.

   On admettra que $\varphi_0(x)$ existe si $|x|$ reste inférieur à un certain réel positif R (qu'on ne cherchera pas à déterminer) et que sa dérivée est $\varphi_0'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, existant sous les mêmes conditions.

   (a) Etablir une relation de récurrence entre a_n et a_{n-1} pour tout n entier naturel non nul.

   (b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $\quad a_n = F(n)$.