ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTION : GENERALE (durée : 2h)

EXERCICE 1 :

Une assemblée générale de copropriétaires, constituée de $3N$ personnes, vote pour l'adoption d'un projet proposé par un groupe A de p personnes faisant partie de l'assemblée, $(p < N)$. Ce projet, pour être accepté, doit recueillir au moins les $2/3$ des voix des $3N$ copropriétaires présents. On suppose que les membres de A votent tous, sans exception, pour l'adoption de leur projet et que les autres votent de manière indépendante avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ en faveur du projet, $\frac{1}{2}$ contre celui-ci.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de voix n'appartenant pas à A favorable au projet.

1. Déterminer une expression de la probabilité P pour que le projet soit adopté, en fonction de p et N.
2. Montrer que si N satisfait à certaines conditions, la loi de X peut-être approximée par une loi normale dont on précisera les paramètres.
3. On choisit $N = 20$ et $p = 11$.
   (a) Justifier l'approximation faite à la question 2).
   (b) Calculer P à partir de cette expression.
   A la fin du document, vous trouverez la table de loi normale

EXERICE 2 :

On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On admettra que A et B commutent.

1. Montrer que A est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Montrer que B est semblable à la matrice diagonale $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
   En déduire les sous-espaces propres de A et B.
2. On considère l'équation matricielle (E) : $X^2 + DX + D' = 0$, où X est une matrice carrée d'ordre 3 à déterminer et 0 la matrice nulle d'ordre 3.
   (a) Déterminer toutes les matrices diagonales solutions de l'équation (E).
   (b) En déduire des solutions particulières de l'équation matricielle (E') :

$$X^2 + AX = B = 0$$

EXERCICE 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ pqr $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$.
λ désignant un paramètre réel de l'intervalle $]0,1[$, on pose $f_\lambda(x) = f(x-\lambda)$

1. (a) Montrer que les courbes représentatives des fonctions f_λ et f ont en commun un point et un seul, dont on précisera l'abscisse x_λ.
   (b) Déterminer la limite de x_λ lorsque λ tend vers 0.
2. Soient a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$; et soit F une fonction numérique définie, continue sur $[0,b]$, dérivable sur $]0,b[$ et strictement décroissante sur $[a,b]$.
   λ désignant un paramètre réel de l'intervalle $]0,b[$, on pose $F_\lambda(x) = F(x-\lambda)$.
   Montrer que les courbes représentatives des fonctions F_λ et F ont en commun un point et un seul dont l'abscisse X_λ tend vers a lorsque λ tend vers 0.

Fonction de répartition de la loi normale

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986