ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : ECONOMIQUE

EXERCICE I

On désigne par $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à éléments dans $\mathbb{R}$.
(e_1, e_2, e_3) est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.
A tout élément u de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on associe sa matrice M_u relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3).
On note J la matrice : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
et pour tout élément A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $A^* = J.{}^tA.J$
où ${}^tA$ est la matrice transposée de A, c'est-à-dire la matrice carrée d'ordre 3 telle que, si A est la matrice d'éléments $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 3)$, l'élément $a'_{i,j}$ de ${}^tA$ est a_{ji}.

1. Soient A et B éléments de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, calculer $(A^*)^*$ et $(AB)^*$ en fonction de A, A^* et B^*.

2. Soit Γ l'ensemble des matrices A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^*A = I$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   et G l'ensemble des endomorphismes u de $\mathbb{R}^3$ tels que M_u appartient à Γ.
   Montrer que si $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $u \in G$ et $u(x) = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ alors on a :

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

   (Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $Y = M_uX$, on formera alors ${}^tY.J.Y$)

3. Pour tout réel a, on définit :

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \qquad \operatorname{sh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

   On vérifiera que $\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1$.
   On admettra que si a et b sont des réels tels que $a^2 - b^2 = 1$, il existe un réel α tel que $a = \operatorname{ch}\alpha$ et $b = \operatorname{sh}\alpha$.
   Soit G_1 le sous-ensemble des éléments u de G tels que $u(e_1) = e_1$ et tels que la composante de $u(e_3)$ sur e_3 soit positive.
   Montrer que si u est un élément de G_1, M_u est de l'une des formes suivantes :

$$\text{(type 1)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ 0 & \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{ou (type 2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha \\ 0 & \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$$

   où α est un nombre réel quelconque.

EXERCICE II

1. Soit a un nombre réel strictement positif. On désigne par f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^{\times}$ par :

$$f_a(x) = x^a \ln x$$

(ln désigne le logarithme népérien).
Montrer que la fonction f_a est prolongeable par continuité en $x=0$ et en déduire l'existence et le calcul de l'intégrale $I_a = \int\limits_0^1 x^a \ln x dx$.

2. (a) Etudier les variations de la fonction définie par : $\varphi(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} - x$.

   (b) En déduire que pour x vérifiant $0 < x < 1$, on a : $0 < \frac{x \ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.

3. Pour a un réel strictement positif, on définit la fonction g_a sur $\mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$ par : $g_a(x) = \frac{x^a \ln x}{x^2-1}$.
   Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en $x=0$ et en $x=1$.

4. On pose, pour tout entier naturel n : $J_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2-1} dx$.

   (a) Montrer que la fonction g_a est intégrable sur le segment $[0,1]$.

   (b) Déduire de la question 1) le calcul de $J_{n+1} - J_n$.
   Montrer que la suite (J_n) est convergente.

5. Déduire de la question 2)b) une majoration de J_n et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

6. En calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} (J_k - J_{k-1})$, démontrer que $J_0 = \frac{1}{4} \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

EXERCICE III

Un béton doit être dosé à 350 kg de ciment par m^3.
Un entrepreneur exécute des tests pour vérifier la bonne qualité du béton vendu.
Dans le modèle probabiliste retenu, on note :

A_1 est l'évènement " le dosage est inférieur à 340 kg/m^3 "
A_2 est l'évènement " le dosage est compris entre 340 kg/m^3 et 350 kg/m^3 "
A_3 est l'évènement " le dosage est supérieur à 350 kg/m^3 "
B_1 est l'évènement " la centrale à béton essaie de fournir du béton dosé à 350 kg/m^3 "
B_2 est l'évènement " la centrale à béton triche sur le dosage en ciment "

On a relevé les valeurs des probabilités conditionnelles $P(A_i/B_j)$ avec $i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2\}$ dans le tableau suivant :

	A_1	A_2	A_3
B_1	0,3	0,2	0,5
B_2	0,5	0,2	0,3

1. Avant la mise en place du teste, on suppose à priori que $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.
   Calculer $P(B_1/A_1)$ et $P(B_2/A_2)$, probabilités traduisant l'opinion à postériori après avoir examiné des éprouvettes de bétons dosées à moins de 340 kg/m^3.

2. L'entrepreneur teste n éprouvettes de béton : il détermine son opinion à postériori sur la qualité du béton vendu en procédant ainsi :
   Il considère le modèle où $P(B_1) = P_{1,0} = \frac{1}{2}$ et $P(B_2) = P_{2,0} = \frac{1}{2}$.
   Puis, il procède au dosage d'une première éprouvette :
   S'il constate que l'évènement A_{i_1} $(i_1 = 1,2,3)$ est réalisé, il remplace $P_{1,0} = P_{2,0} = \frac{1}{2}$, respectivement par $P_{1,1} = p(B_1/A_{i_1})$ et par $P_{2,1} = P(B_2/A_{i_1})$.

Et ainsi successivement après chaque dosage, il remplace $P_{i,k-1}$ et $P_{2,k-1}$ respectivement par les probabilités conditionnelles $P_{1,k} = P(B_1/A_{i_k})$ et $P_{2,k} = P(B_2/A_{i_k})$ s'il constate que l'évènement A_{i_k} $(i_k = 1, 2, 3)$ est réalisé.
Lors de l'examen de la $n^{ième}$ éprouvettes, il y en a r réalisant A_1, s réalisant A_2 et t réalisant A_3, alors l'opinion à postériori est telle que les $P_{i,n}$ $(i = 1, 2)$ sont proportionnels aux :

$$P_{i,0}.[P(A_1/B_i)]^r.[P(A_2/B_i)]^s.[P(A_3/B_i)]^t$$

pour $(i = 1, 2)$

EXERCICE IV

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soient y, a, b trois paramètres réels différents de 0 et 1 tels que la loi du couple (X, Y) soit donné par le tableau suivant :

$X \diagdown Y$	y	0	1
0	1/4	a	1/8
1	1/5	b	1/10

X prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, Y dans $\{y, 0, 1\}$
$a = p((X = 0) \cap (Y = 0))$, $b = p((X = 1) \cap (Y = 0))$

1. (a) Déterminer a et b de manière que X et Y soient indépendantes.
   (b) Quelles seraient alors les lois conditionnelles de X pour les différentes valeurs de Y ?
2. On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{5}$.
   Déterminer la valeur de y pour que le coefficient de corrélation linéaire de X et Y soit nul.
   Les variables X, Y sont-elles indépendantes ?