ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : ECONOMIQUE

EXERCICE I :

On veut étudier l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ vérifiant l'égalité :

$$(1) \qquad A^2 = A$$

On appelle f l'endomorphisme associé à la matrice A : $y = f(x)$ avec $f : E_2 \to E_2$, où E_2 est un espace vectoriel de dimension 2 muni de la base (e_1, e_2) avec $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$.

$$Y = AX \text{ avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1. A et B étant deux matrices vérifiant (1), démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A + B$ vérifie l'égalité (1) est que :

$$AB + BA = 0 \qquad (0 \text{ matrice nulle})$$

2. Soit p l'endomorphisme associé à A.

   (a) Montrer que l'ensemble $Inv(p) = \{x \in E_2 \quad / \quad p(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de E_2.
   Peut-on considérer que $Inv(p)$ est un sous-espace propre ?
   A quelle valeur propre est-il associé ?

   (b) Montrer que l'ensemble $\ker p = \{x \in E_2, \quad / \quad p(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E_2.
   Peut-on considérer que $\ker p$ est un sous-espace propre ?
   A quelle valeur propre est-il associé ?

   (c) Soit λ une valeur propre de p, associée au vecteur propre v ($v \neq 0$), démontrer que $(\lambda^2 - \lambda) = 0$ et en déduire que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
   Soient E_0 et E_1 les sous-espaces propres associés à $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, que peut-on dire sur ces sous-espaces ?
   Démontrer que leur intersection est réduite au vecteur nul et que tout vecteur x de E_2 s'écrit d'une façon unique $x = y + z$, où $y \in E_0$ et $z \in E_1$.
   En déduire que pour tout vecteur x de E_2, il existe un unique vecteur x' de $\ker p$ et un unique vecteur de x'' de $Inv(p)$ tels que $x = x' + x''$.
   On note alors $E_2 = \ker(p) \oplus Inv(p)$.

   (d) Soit $\mathrm{Im}(p) = \{y \in E_2 \quad / \quad \exists x \in E_2 \quad y = p(x)\}$.
   Vérifier que $\mathrm{Im}(p)$ est un sous-espace vectoriel de E_2, et que $\mathrm{Im}(p) = Inv(p)$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ vérifiant (1).
   Montrer par le calcul matriciel que A est nécessairement une matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}), \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & \dfrac{a - a^2}{b} \\ b & 1 - a \end{pmatrix} \quad (b \neq 0)$$

4. On pose $\mathrm{tr}(A) = a + d$.
Déterminer dans le cas général $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$, p étant l'endomorphisme associé à A.
Indiquer une base de ces deux sous-espaces.
Montrer les équivalence suivantes :
$\mathrm{tr}(A) = 0 \Leftrightarrow \ker(p) = E_2$
$\mathrm{tr}(A) = 1 \Leftrightarrow \ker(p)$ est une droite vectorielle
$\mathrm{tr}(A) = 2 \Leftrightarrow \ker(p) = \{0\}$

5. Soient A et B deux matrices vérifiant l'égalité (1), telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a & \dfrac{a-a^2}{b} \\ b & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a' & \dfrac{a'-(a')^2}{b'} \\ b' & 1-a' \end{pmatrix} \quad b, b' \text{ étant deux réels non nuls.}$$

Calculer $AB + BA$.
Démontrer que $AB + BA = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + a' = 1 \\ b + b' = 0 \end{cases}$
En déduire que $AB = BA = 0$, et le théorème suivant :
Si f et g sont deux endomorphismes de E_2 tels que $f^2 = f$ et $g^2 = g$, alors si $(f+g)^2 = f + g$, on a $f + g = \mathrm{Id}_{E_2}$.

EXERCICE II :

1. Etudier les fonctions $f_n(x) = \tan^n x$, où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
Tracer les graphes de ces fonctions dans un même repère orthonormé en plaçant clairement ces graphes les uns par rapport aux autres.

2. Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \tan^n x dx$.
Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
On rappelle que la dérivée de $\tan x$ et $1 + \tan^2 x$.

3. Etudier la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$. Prouver l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4. On veut démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Pour cela, on fixera un nombre α compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.
On écrit alors $I_n = \int_0^{\alpha} \tan^n x dx + \int_{\alpha}^{\pi/4} \tan^n x dx$.
Démontrer que $0 \leqslant \int_0^{\alpha} \tan^n x dx \leqslant \tan^n \alpha$ et $0 \leqslant \int_{\alpha}^{\pi/4} \tan^n x dx \leqslant \frac{\pi}{4} - \alpha$.
Déterminer alors la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5. Démontrer les inégalités :

$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n \geqslant \frac{1}{2(n+1)} \quad \text{et} \quad I_{n+2} \leqslant \frac{1}{2(n+1)}.$$

On utilisera pour cela la relation de récurrence de la question 2).
En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ (équivalent).

EXERCICE III :

On considère une urne contenant $(n-2)$ boules blanches et 2 boules noires.
On tire les boules une à une sans remise. On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au rang d'apparition de la première boule noire et par Y le rang d'apparition de la seconde boule noire.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par les variables X et Y.

2. Décrire l'univers permettant de définir les variables X et Y.
(On utilisera un modèle lié aux combinaisons)

3. Soit $i \in \{1, 2, .., n-1\}$, démontrer que $P(X = i) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}$ et que si $j \in \{2, 3, ..., n\}$, $P(Y = j) = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}$

4. Calculer l'espérance et la variance de X puis celles de Y.

5. On reprend le même problème en introduisant le couple aléatoire $Z = (X, Y)$.
On prendra pour univers $\Omega = S_n$ = ensemble des bijections de l'ensemble des boules supposées numérotées de 1 à n sur l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ des rangs des tirages et sur lequel on définit une probabilité uniforme.
Démontrer que : $P[Z = (i, j)] = \dfrac{2(n-2)!}{n!}$, où $(i, j) \in T$ et $T = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad / \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$
Retrouver par cette méthode $P(X = i)$ et $P(Y = j)$.

6. Calculer le coefficient de corrélation des deux variables X et Y.

EXERCICE IV :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = |x|^{1+1/x}$ pour $x \neq 0$

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f.
Montrer que la fonction f peut-être prolongée à droite du point 0, on appellera g la fonction obtenue par ce prolongement.

2. Etudier les branches infinies de g (asymptotes, ...)

3. En quels points la fonction g est-elle dérivable ?
Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$ et $g'_d(0)$.

4. Déterminer le signe de $g'(x)$. On étudiera l'application :

$$x \mapsto \ln|x| + \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Etudier les variations de g.

5. Donner l'allure du graphe de g.