ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

PROBLEME

I]

Soit $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}$ $(n \in \mathbb{N})$

1. Etudier les variations de $f_n(x)$.
2. Tracer dans un même repère les graphes correspondant à $n = 0, 1, 2, 3$.
3. Etudier le comportement de $f_n(x)$ sur $[0, 1[$ quand n tend vers $+\infty$.

II]

On pose $I_n = \int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$.

1. Expliquer la convergence de I_n.
2. Etudier la suite (I_n), $n \geqslant 0$.
3. On se propose de démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
   On fixe alors un réel α compris entre 0 et 1 tel que :
   $$I_n = \int\limits_0^\alpha \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx + \int\limits_\alpha^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$$
   Démontrer :
   (a) $0 \leqslant \int\limits_0^\alpha \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx \leqslant 2.\alpha^n$.
   (b) $0 \leqslant \int\limits_\alpha^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx \leqslant 2.\sqrt{1-\alpha}$.
   Comment peut-on choisir α pour que $0 < 2\sqrt{1-\alpha} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (ε étant un réel positif donné) ?
   Que pensez-vous de la première majoration ?
   En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

III]

On cherche maintenant un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

1. Démontrer que $I_n - I_{n-1} = -\int\limits_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} dx$ puis que $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
   En déduire les valeurs de I_0, I_1, I_2, I_3.
2. Calculer explicitement I_n sous la forme d'un quotient, le résultat ne devant faire intervenir que des factorielles et des puissances de 2.

3. Le symbole ln désignant le logarithme népérien, démontrer que :

$$\ln(I_n) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{2k}) + \ln(2)$$

4. En étudiant la série de terme général $u_k = \ln(1+\dfrac{1}{2k})$, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -\infty$.

5. (a) On pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.
   Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$?

   (b) On pose $v_n = S_n - \ln n$.
   Etudier la monotonie de cette suite (On effectuera un développement limité de $\dfrac{1}{n+1} - \ln(1+\dfrac{1}{n})$ du second ordre par rapport à $\dfrac{1}{n}$).

   (c) Démontrer que $v_n \geqslant 0$.
   [On utilisera $\ln(n) = \int\limits_1^n \dfrac{dt}{t}$, et on écrira

$$v_n = \left(1 - \int_1^2 \frac{dt}{t}\right) + \left(\frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dt}{t}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}\right) + \frac{1}{n}]$$

   En déduire que l'on peut écrire :

$$S_n = \ln n + \gamma + \eta(n)$$

   avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta(n) = 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}_+$ (appelée constante d'Euler)

   (d) Démontrer que la série de terme général

$$w_k = -\ln(1+\frac{1}{2k}) + \frac{1}{2k} \quad (k \geqslant 1)$$

   est convergente, sa somme étant notée W. Que peut-on dire sur W ?
   En utilisant la relation :

$$\ln(I_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{n} w_k + \ln 2$$

   démontrer que :

$$\ln(I_n) = W_n - \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(2) - \frac{\gamma}{2} + \eta_1(n)$$

   avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_1(n) = 0$ et $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$.
   En déduire que $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \exp(-\dfrac{\gamma}{2} + \ln(2) + W_n + \eta_1(n))$
   Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{\sqrt{n}}$.

IV]

1. Soit maintenant la <u>série</u> de terme général (I_n).
   Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_0^1 \dfrac{x^k}{\sqrt{1-x}} dx\right)$?

2. (a) Ecrire $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$ sous la forme d'une intégrale.

(b) Prouver la convergence de cette intégrale.

(c) Démontrer que $\int\limits_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{3/2}}dx \geqslant \int\limits_0^{1-1/n} \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{3/2}}dx \quad (n>0)$

En déduire que : $\int\limits_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{3/2}} \geqslant \left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right)(2\sqrt{n}-2)$

3. Chercher la limite quand n tend vers $+\infty$ de $(1-\frac{1}{n})^{n+1}$.

4. Quelle est alors la limite de $\int\limits_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^{3/2}}dx$ quand n tend vers $+\infty$?
Quelle résultat retrouve-t-on ?

EXERCICE D'ALGEBRE

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & -7 & -4 & -15 \end{pmatrix}$

1. En utilisant l'algorithme de Gauss et les matrices associées aux transformations élémentaires sur les lignes, démontrer qu'il existe une matrice T carrée d'ordre 4 triangulaire supérieure (c'est-à-dire $T = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4 \\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$ et $a_{i,j}=0$ si $i>j$) et une matrice P carrée inversible d'ordre 4 vérifiant

$$PA = T$$

2. En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme : $A = S.T$, où S est une matrice carrée d'ordre 4 triangulaire inférieure (c'est-à-dire $S = (a'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4 \\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$ et $a'_{i,j}=0$ si $i<j$)

3. En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme : $A = SDS'$ D étant une matrice diagonale, S' étant une matrice triangulaire supérieure n'ayant que des termes égaux à 1 sur la diagonale principale.

4. Déduire de la méthode précédente la résolution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & \sqrt{2} \\ 4x_1 & & & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 2\sqrt{2} \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -2\sqrt{2}+\sqrt{7} \\ -6x_1 & - & 7x_2 & - & 4x_3 & - & 15x_4 & = & \frac{\sqrt{13}}{4} \end{array}\right.$$

(on utilisera deux changements d'inconnues)