ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTION : GENERALE - ECONOMIQUE - TECHNOLOGIQUE

EXERCICE I :

I]

On considère pour tout n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \frac{\ln(t)}{t^n}$$

(où ln désigne le logarithme népérien)

Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $I_n(X) = \int\limits_1^X f_n(t)dt$.

1. (a) Calculer $I_1(X)$ et $I_n(X)$ pour $n \geqslant 2$.

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale $J(X) = \int\limits_2^X f_2(t)dt$ et sa limite quand X tend vers $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 :

$$f_2(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f_2(t)dt \leqslant f_2(k)$$

II]

On considère la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^2}$

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$J_n + \frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant S_n \leqslant J_n + \frac{\ln(2)}{4}.$$

2. Démontrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer un encadrement de sa limite $l = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE II :

Sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé, on considère la suite $(Y, X_1, X_2, ..., X_n, ...)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs respectivement dans les espaces $\mathbb{N}$ muni de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pour Y, et $\{0, 1\}$ muni de $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ pour X_k $(k = 1, 2, .., n, ...)$

On suppose que Ω est un ensemble de séries de fabrication ω.

$Y(\omega)$ représente le nombre de pièces défectueuses de la série ω

$X_k(\omega)$ représente la nature du défaut de la $k^{ième}$ pièce de la série ω avec $X_k(\omega) = 1$ si le défaut provient d'une erreur machine et $X_k(\omega) = 0$ si le défaut provient d'une erreur humaine.

(On suppose qu'il n'existe pas d'autre type d'erreur).

En outre :

Y est une variable aléatoire de loi : $P(Y = i) = p^i(1-p)$ pour $i = 0, 1, ..$ et p est un réel fixé $(0 < p < 1)$;

X_k est une variable de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2} = P(X_k = 1)$ pour $k = 1, 2, .., n, ...$

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$, la probabilité qu'une série comporte exactement n pièces défectueuses provenant d'une erreur machine est :
$$\frac{2p^n(1-p)}{(2-p)^{n+1}}$$
On admettra que pour $|x| < 1$ et pour tout entier n, la série de terme général $\frac{(n+k)!}{n!k!}x^k$ converge et a pour somme :
$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}.$$
2. Sachant qu'une série de fabrication comporte au moins une pièce défectueuse provenant d'une erreur machine, calculer la probabilité qu'elle en comporte exactement N ($N \geqslant 1$).

EXERCICE III :

On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie :

- Si l'on obtient " pile ", on décide de jouer uniquement avec le dé A
- Si l'on obtient " face ", on décide de jouer uniquement avec le dé B

1. Calculer la probabilité d'avoir " rouge ".
2. Calculer la probabilité d'obtenir " rouge " au troisième coup sachant que l'on a déjà obtenu cette couleur aux deux premiers coups.
3. Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A sachant que l'on a obtenu " rouge " au n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^{\times}$)