ESLSCA 1992 Option économique Maths II

EXERCICE I

Pour tout réel α , on considre la matrice :

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \alpha \end{pmatrix}$$

et l'on pose

$$A = M\left(\frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1. Soient

   $$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

   deux matrices colonnes.
   Résoudre suivant la méthode du pivot de Gauss, en fonction de a, b et c le système : $AX = B$ d'inconnue X.
   En déduire que A est une matrice inversible et calculer A^{-1}

2. Pour quelles valeurs du paramètre α , les trois vecteurs colonnes :

   $$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \alpha \end{pmatrix}$$

   de la matrice $M(\alpha)$ sont-ils linéairement dépendants ?
   Donner alors une relation de dépendance linéaire entre V_1, V_2 et V_3.

3. Lorsque $M(\alpha)$ est inversible, on désigne par $N(\alpha)$ son inverse.

   (a) Déterminer en fonction de α les trois coefficients de la dernière ligne de $N(\alpha)$. Montrer en particulier que le coefficient u de $N(\alpha)$ situé à l'intersection de la 3ème ligne et de la 3ème colonne vaut :

   $$u = \frac{1}{\alpha - \frac{7}{36}}$$

(b) On suppose à présent que α vaut $\dfrac{1}{5}$ à une précision $\varepsilon = 10^{-6}$ c'est dire :

$$\alpha \in \left]\frac{1}{5} - \varepsilon; \frac{1}{5} + \varepsilon\right[$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, donner un majorant de l'erreur commise lorsqu'on prend pour u la valeur approchée 180.

EXERCICE II

Un jeu vidéo comporte N phases de jeu : niveau 1, niveau 2, ... niveau N. On suppose que N est un entier au moins égal 3. Le jeu commence au niveau 1. Ensuite, il faut réussir un niveau pour passer au suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier niveau.
Le jeu s'arrête si l'on a échoue à l'un des niveaux ou si l'on a réussi tous les niveaux.
On suppose en outre que, lorsqu'on parvient au niveau k ($k = 1, 2, ..., N$), la probabilité de réussir ce $k^{ième}$ niveau est égale $\dfrac{1}{k}$.
On désigne par X_N la variable alatoire suivante :

"Nombre de niveaux entièrement franchis au moment où le jeu s'arrête".

Ainsi, pour $k = 1, 2, ..., N-1$, l'événement $(X_N = k)$ signifie que l'on a échoué au niveau $k + l$, et l'événement $(X_N = N)$ que l'on est vainqueur du jeu.

1. Démontrer que : $P(X_N = k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$ pour $k = 1, 2, ...N-1$ et que :

$$P(X_N = N) = \frac{1}{N!}$$

2. Calculer $E(X_N + 1)$. En déduire que $E(X_N) = S_N - 1$ avec

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

Que vaut $\lim\limits_{N \to +\infty} E(X_N)$?

3. Exprimer $E[(X_N + 1)(X_N - 1)]$ l'aide de S_{N-3}
En déduire $V(X_N)$ en fonction de S_N, S_{N-3} et N.
Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} V(X_N) = 3e - e^2$.

EXERCICE III

Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

1. Montrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^{\times}}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}^{\times}}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.
On rappelle que deux suites sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre dcroissante et si leur différence tend vers zéro.

2. Montrer que pour tout entier n non nul, le réel ℓ est compris entre deux termes conscutifs u_n et u_{n+1} de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\times}}$

3. Ecrire un algorithme en Turbo-Pascal permettant, grâce l'encadrement précédent, d'obtenir les deux premières décimales exactes du réel ℓ.